

Differential Geometry

Shubham Dwivedi*
Universität Hamburg

July 16, 2026

Dies sind die Vorlesungsnotizen zur Differentialgeometrie für einen Kurs, der im Sommersemester 2026 an der Universität Hamburg gehalten wurde. Ich danke all meinen Studierenden für ihre sehr aktive Teilnahme am Kurs, für das Stellen sehr guter Fragen sowie für die wertvollen Diskussionen. Diese Notizen basieren auf Themen, deren Behandlung in vielen hervorragenden Quellen zu finden ist, wie (aber nicht beschränkt auf) [Lee13], [Bär], [Wen], [Tu11], [Wal] und [baum].

Lesung 1	3
1 Mannigfaltigkeiten	5
1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten	5
2 Glatte Strukturen	10
2.1 Beispiele für glatte Atlanten	10
2.2 Weitere Beispiele	13
3 Eigenschaften glatter Abbildungen	16
4 Tangentialvektoren und Tangentialräume	17
4.1 Tangential- und Kotangentialbündel	19
5 Derivation und Tangentialvektoren	22
5.1 Differential einer Abbildung in Koordinaten	27
6 Vektorfelder	28
7 Untermannigfaltigkeiten	29
7.1 Submersionen, Immersionen und Einbettungen	29
7.2 Der Rangsatz	30
7.3 Einbettungen	36
7.4 Untermannigfaltigkeiten	39
7.5 Einbettungen und Niveaumengen	40

*Bitte melden Sie Tippfehler oder Fehler per E-Mail an shubham.dwivedi@uni-hamburg.de

8	Vektorfelder	43
8.1	Glatte Vektorfelder	43
8.2	Lokale und globale Rahmen	44
8.3	Vektorfelder und Derivationen	45
8.4	Vektorfelder, glatte Abbildungen, Pushforwards und Pullbacks	46
8.5	Vektorfelder und Untermannigfaltigkeiten	49
8.6	Lie-Klammern	49
9	Integralkurven und Flüsse von Vektorfeldern	53
9.1	Integralkurven	53
9.2	Flüsse von Vektorfeldern	55
9.3	Vollständige Vektorfelder	60
10	Lie-Ableitungen	62
10.1	Kommutierende Vektorfelder	64
11	Kotangentialbündel und 1-Formen	66
11.1	Tangential-Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten	67
11.2	Kovektorfelder oder 1-Formen	67
11.3	Das Differential einer Funktion	68
11.4	Rückzug von Kovektorfeldern	71
11.5	Lie-Ableitungen von 1-Formen	72
12	Tensoren	74
12.1	Multilineare Algebra	74
12.2	Kovariante und kontravariante Tensoren	75
12.3	Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten	77
12.4	Pullbacks von Tensorfeldern	80
12.5	Lie-Ableitungen von Tensorfeldern	81
13	Differentialformen	83
13.1	Alternierende Tensoren	83
13.2	Das Dach-Produkt	86
13.3	Inneres Produkt	88
13.4	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	89
13.5	Äußere Ableitung	90
13.6	Lie-Ableitungen von Differentialformen	94
14	Integration auf Mannigfaltigkeiten	96
14.1	Zerlegungen der Eins	96
14.2	Top-Formen auf Mannigfaltigkeiten	98
14.3	Orientierbarkeit	98
14.4	Integration von Top-Formen auf glatten Mannigfaltigkeiten	100
14.5	Transformationsformel	101
14.6	Volumenform und Volumenmaß	101
15	Der Satz von Stokes	103
15.1	Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand	103
15.2	Der Satz von Stokes	104

Lesung 1

Bevor wir uns eingehend mit der Differentialgeometrie befassen, wollen wir zunächst einmal ganz ungezwungen erörtern, worum es bei der Differentialgeometrie eigentlich geht. Nehmen wir an, $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei eine "glatte Fläche", und seien $x, y \in \Sigma^2$; wir möchten nun den "Abstand" zwischen x und y messen. Natürlich möchten wir den Abstand zwischen zwei Punkten auf Σ *entlang* Σ messen. Nehmen wir vorerst an, wir hätten einen Pfad $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma([a, b]) \subset \Sigma$, $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wir können dann die "Länge von γ " definieren durch

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt \quad (0.1)$$

wobei $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt ist und $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Nachdem wir die Länge definiert haben, können wir den Abstand zwischen x und y definieren als

$$d(x, y) := \inf_{P(x, y)} l(\gamma), \quad (0.2)$$

wobei $P(x, y) = \{\gamma \mid \gamma \text{ ist ein Weg zwischen } x \text{ und } y\}$.

Daraus ergibt sich folgende Frage:

Frage 0.1. *Gibt es für eine glatte Fläche Σ^2 und $x, y \in \Sigma$ einen glatten Weg von x nach y , der die kürzestmögliche Länge hat? Wenn ja, ist ein solcher Weg dann eindeutig?*

Wir werden später im Kurs sehen, dass die Antwort auf beide Fragen „Ja“ lautet, wenn x und y nahe genug beieinander liegen. Ein solcher kürzester Weg wird als **Geodäte** bezeichnet und durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung charakterisiert. Solche Geodäten entsprechen den "Geraden" auf Σ , auch wenn auf Σ möglicherweise kein *gerader* Weg existiert. So weißt du vielleicht bereits, dass der kürzeste Weg zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Oberfläche einer Kugel, also die Geodäten, "Großkreise" sind.

Vielleicht ist dir aufgefallen, dass das zentrale Konzept, das wir benötigten, um die Länge eines Weges und damit den Abstand zwischen zwei Punkten zu definieren, das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist. Wir mussten den Wert von $\langle v, w \rangle$ für jene $v, w \in \mathbb{R}^3$ kennen, die an einem beliebigen Punkt tangential zu Σ sind. Vielleicht wissen Sie aus früheren Kursen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es uns ermöglicht, den Winkel θ zwischen zwei Vektoren v, w nach der folgenden Formel zu berechnen:

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \theta.$$

Somit können wir nicht nur die Länge eines beliebigen glatten Pfades entlang Σ definieren, sondern auch den Winkel zwischen zwei glatten Pfaden, sofern sie sich schneiden. Die Möglichkeit, das Skalarprodukt zweier „Tangentialvektoren“ zu bilden, macht Σ zu einer **2-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit**, und das Skalarprodukt wird als **Riemannsche Metrik** bezeichnet. Wie bei jedem neuen mathematischen Objekt bzw. jeder neuen mathematischen Struktur stellt sich die naheliegende Frage: Angenommen, $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ seien zwei glatte Flächen und $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ eine glatte bijektive Abbildung, sodass auch $f^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ glatt ist. Eine solche Funktion f wird als **Diffeomorphismus** bezeichnet, und Σ_1 und Σ_2 werden als zueinander **diffeomorph (diffeomorph)** bezeichnet. Wenn f zudem alle Abstände und Winkel beibehält, wird sie als **Isometrie** bezeichnet, und Σ_1 und Σ_2 sind dann zueinander **isometrisch**.

Frage 0.2. *Wenn Σ_1 und Σ_2 zwei diffeomorphe Flächen sind, gibt es dann eine Möglichkeit zu erkennen, ob sie auch isometrisch sind?*

Betrachten wir zum Beispiel die beiden unterschiedlichen Kugeln in $\mathbb{R}^3$. In Abbildung 1 sehen wir die Standard-Einbettung einer Kugel in $\mathbb{R}^3$, und in Abbildung 2 eine leicht vom Standard abweichende Einbettung, bei der ein Teil der Kugel so gestreckt ist, dass er wie ein Zylinder aussieht. Intuitiv scheint es, als seien die beiden Kugeln diffeomorph zueinander. Wiederum scheint es intuitiv so, als sollten sie *nicht* isometrisch sein, da die Länge der Wege auf den Teilen der Kugeln im gestreckten Abschnitt unterschiedlich sein könnte. Aber wie lassen sich diese Gedanken formal begründen?

Eine Möglichkeit, diese Gedanken formal zu begründen, besteht darin, das Konzept des Paralleltransports (Paralleltransport) von Vektoren entlang geschlossener Wege einzuführen. In den Abbildungen weist Abbildung 1 eine „rundene“ Kugel auf, und der Paralleltransport eines Vektors v entlang des eingezeichneten geschlossenen Weges ergibt bei der Rückkehr einen anderen Vektor. Im Gegensatz dazu sieht der schraffierte Teil der Kugel in Abbildung 2 flach aus, und der Paralleltransport des Vektors v ergibt am Ende denselben Vektor. Dies wird in den kommenden Vorlesungen formal begründet, und wir werden zeigen, dass diese Eigenschaft mit der **Krümmung** der Kugel an einem Punkt zusammenhängt. Dies wird es uns auch ermöglichen zu beweisen, dass die Kugeln in beiden Abbildungen tatsächlich nicht isometrisch sind!

Wir werden uns ausführlich mit der Definition und Untersuchung der Eigenschaften der Krümmung befassen und dabei beweisen, dass es sich dabei um ein mathematisches Objekt handelt, das als **Tensorfeld** bezeichnet wird. Wir werden uns außerdem mit dem Begriff der *lokal flach* beschäftigen mit Teilen von Flächen, d.h., die lokal wie Teile von $\mathbb{R}^2$ aussehen. Beispielsweise zeigt der Zylinder in Abbildung 3 einen Zylinder, der lokal flach ist. Tatsächlich wirft dies die Frage auf, ob die *gesamte* Kugel in Abbildung 2 so gestreckt werden kann, dass die Kugel überhaupt nicht gekrümmt ist?

Diese Frage wird beantwortet, nachdem wir das folgende erstaunliche Ergebnis bewiesen haben.

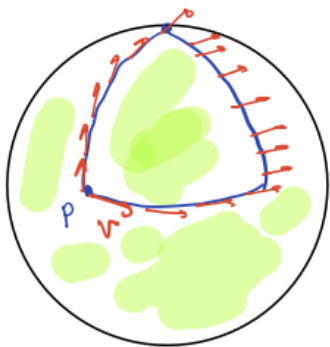


Figure 1: Standard embedding of $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ with parallel transport of a vector along a closed path leading to a different vector on return.

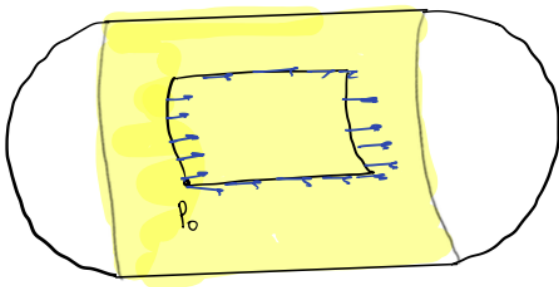


Figure 2: Another embedding of $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ but now the yellow shaded region is locally flat. Parallel transport of a vector returns to the same vector along a closed path.

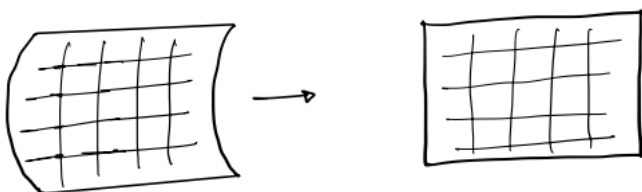


Figure 3:

Satz 0.3 (Gauss-Bonnet Satz). Wenn M eine kompakte, zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M ist und wenn K die Gauß-Krümmung von M und k die geodätische Krümmung von ∂M ist, dann gilt

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k ds = 2\pi\chi(M), \quad (0.3)$$

wobei $\chi(M)$ die Eulersche Charakteristik von M ist.

Wir werden den Satz von Gauss-Bonnet verwenden, um zu beweisen, dass es keine Riemannsche Metrik auf S^2 geben kann, die überall lokal flach ist.

Wir beginnen nun mit der formalen Betrachtung der Themen.

1. Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Zunächst wiederholen wir einige grundlegende Begriffe aus der Topologie.

Definition 1.1. Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ wird als **Topologie** auf M bezeichnet, wenn

1. $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.
2. Beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{O}$ gehören zu $\mathcal{O}$, dh., wenn $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{O}$ gilt, dann gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} U_i$.
3. Endliche Schnittmengen von Elementen in $\mathcal{O}$ gehören zu $\mathcal{O}$, d. h., wenn $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, dann gehört auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$. Wir bezeichnen das Paar $(M, \mathcal{O})$ als einen **topologischen Raum**.

Elemente von $\mathcal{O}$ werden als **offene Mengen** (offene Mengen) bezeichnet. Eine Teilmenge $C \subset M$ wird als **geschlossen** (abgeschlossen) bezeichnet, wenn $M \setminus C \in \mathcal{O}$ gilt. Seien $(M, \mathcal{O}_M)$ und $(N, \mathcal{O}_N)$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ wird als **stetig** bezeichnet, wenn

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M \quad \forall V \in \mathcal{O}_N.$$

Das bedeutet, dass die Urbilder von offenen Mengen in N in M offen sind. Eine bijektive stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$, bei der auch f^{-1} stetig ist, wird als **Homöomorphismus** bezeichnet; in diesem Fall sagt man, dass M und N **homöomorph** sind.

Wir können nun definieren, was eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Definition 1.2. Sei $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann wird M als **n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** bezeichnet, wenn

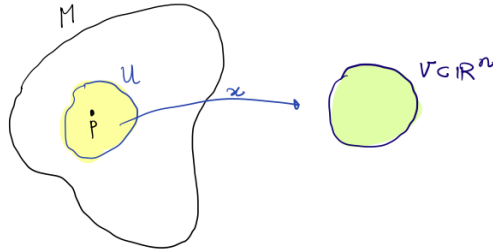
1. M ist **Hausdorff (hausdorffsch)**, d. h., jedes Paar unterschiedlicher Punkte lässt sich durch offene Mengen trennen: Für $p, q \in M$ gibt es offene Mengen $U \ni p$ und $V \ni q$ so, dass $U \cap V = \emptyset$.
2. Die Topologie von M hat eine **abzählbare Basis**, was bedeutet, dass es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ gibt, sodass für jedes $U \in \mathcal{O}$ ein $B_i \in \mathcal{B}$ existiert, wobei $i \in I$ und

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

3. (am wichtigsten) M ist **lokal homöomorph** („lokal homöomorph“) zu $\mathbb{R}^n$ (dasselbe n wie in der Definition), das heißt, für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Menge $U \ni x$ und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine Homöomorphie $x : U \rightarrow V$ zwischen ihnen.

Das bedeutet im Grunde, dass jede Mannigfaltigkeit lokal wie ein euklidischer Raum aussieht.

Definition 1.3. Die Homöomorphismen $x : U \rightarrow V$ in Definition 1.2 werden als **Karten** oder **lokale Koordinatensysteme** von M bezeichnet.



Beispiel 1.4. Jeder euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $U = M$, $V = \mathbb{R}^n$ und $x = id$, der Identitätsabbildung.

Beispiel 1.5. Jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $U = O$, $V = \mathbb{R}^n$ und $x = id$.

Beispiel 1.6. Die n -dimensionale Kugel

$$S^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$$

ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Existenz von Koordinatensystemen lässt sich mithilfe der stereografischen Projektion beweisen. Wenn $s = \{-1, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ den Südpol der Kugel bezeichnet, dann definieren wir $U_1 = S^n \setminus \{s\}$ und setzen $V_1 = \mathbb{R}^n$. Definiere die Abbildung x durch

$$x(y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^n}_{\hat{y}}) = \frac{2}{1 + y^0} \cdot \hat{y}.$$

Offensichtlich ist die Abbildung x stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion x^{-1} ist gegeben durch

$$x^{-1}(z) = \frac{1}{4 + \|z\|^2} (4 - \|z\|^2, 4z)$$

und ist somit ebenfalls stetig. Somit ist x eine Koordinatenfunktion von M .

Ähnlich verhält es sich, wenn wir den Nordpol $n = \{1, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ entfernen und $U_2 = S^n \setminus \{n\}$ setzen sowie erneut $V_2 = \mathbb{R}^{n+1}$ wählen; dann ist $x' : U_2 \rightarrow V_2$ gegeben durch

$$x'(y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^n}_{\hat{y}}) = \frac{2}{1 - y^0} \cdot \hat{y},$$

ist eine weitere Kartierung, was beweist, dass S^n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 1.7. Kann man S^n mit einer einzigen Karte abdecken? Wenn ja, wie würde diese Karte aussehen? Wenn nein, warum nicht?

Aufgabe 1.8. Betrachten Sie den Doppelkegel $M = \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 = (y^2)^2 + (y^3)^2\}$. Beweisen Sie, dass M keine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist, indem Sie zeigen, dass keine Koordinatensystemkoordinaten existieren.

Beispiel 1.9. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion. Die **Grafik** von f ist die Menge

$$\Gamma(f) = \{(y, f(y)) \mid y \in U\}.$$

Sei $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf den ersten Faktor und sei $x : \Gamma(f) \rightarrow U$ die Abbildung $x = \pi_1|_{\Gamma(f)}$, die eine stetige Bijektion mit einer stetigen Umkehrfunktion ist. Somit ist $\Gamma(f)$ eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und tatsächlich homöomorph zu U selbst. Die Koordinaten $(\Gamma(f), x)$ werden als Graphkoordinaten bezeichnet.

Wenn man annimmt, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ genau dann homöomorph sein können, wenn $n = m$ ist, dann gilt Folgendes:

Lemma 1.10. *(Topologische Invarianz der Dimension). Die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit ist eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit.*

Wir werden weitere Beispiele für Mannigfaltigkeiten betrachten. Angenommen, wir haben eine Kartierung oder ein lokales Koordinatensystem $x : U \rightarrow V$. Dann können wir an jedem Punkt $p \in U$ die Koordinaten $(x^1(p), \dots, x^n(p)) \in V \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, die wir als **Koordinaten von p** bezeichnen.

Bevor wir weitere Beispiele und Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten besprechen, wollen wir sehen, ob wir in niedrigeren Dimensionen mehr Informationen über sie gewinnen können.

0-dimension. Ist eine Mannigfaltigkeit M 0-dimensional, so hat jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \ni p$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist. Somit ist $\{p\}$ für jedes p eine offene Teilmenge von M und folglich hat M die diskrete Topologie. Zudem zwingt die zweite Bedingung in Definition 1.2 dazu, dass M ein abzählbarer Raum ist. Somit haben wir Folgendes bewiesen

Vorschlag 1.11. *Die einzigen topologischen Mannigfaltigkeiten der Dimension 0 sind abzählbare Räume mit diskreter Topologie.*

In den kommenden Vorlesungen werden wir die folgende Klassifizierung für eindimensionale Mannigfaltigkeiten beweisen.

Vorschlag 1.12. *Jede zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit ist entweder mit S^1 oder mit $\mathbb{R}$ homöomorph.*

Anhand des folgenden Beispiels möchten wir die Beziehung zwischen der Topologie auf M und der Menge der Koordinatensysteme auf M besser verstehen. Intuitiv scheint es, als könnten wir alles über die Topologie von M sagen, wenn uns eine Sammlung von Koordinatensystemen von M gegeben ist, die es abdecken. Dies ist der Inhalt des nächsten Lemmas.

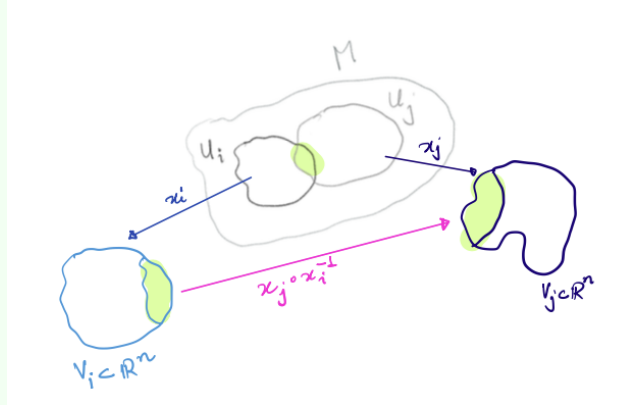
Lemma 1.13. *Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine eindeutige Topologie, wobei offene Mengen die Definitionsbereiche der Koordinatensätze der Mannigfaltigkeit sind.*

Wir beweisen dieses Lemma in einer Reihe von Sätzen.

Vorschlag 1.14. Sei M eine Menge und I eine Indizierungsmenge. Angenommen, für alle $i \in I$ gilt: $U_i \subset M$, $V_i \subset \mathbb{R}^n$ und $x_i : U_i \rightarrow V_i$ sind Bijektionen. Angenommen, es gilt Folgendes:

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$,
2. für alle $i \in I$ ist $x_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ offen, und
3. $x_j \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ ist eine stetige Abbildung auf $\mathbb{R}^n$, für alle $i, j \in I$ (siehe Abbildung 1.14).

Dann verfügt M über eine eindeutige Topologie, in der die Mengen U_i offene Mengen sind und alle Abbildungen x_i Homöomorphismen sind. Ist zudem I abzählbar, so hat die Topologie auf M eine abzählbare Basis, und wenn für jedes $p, q \in M$ ein $i \in I$ existiert, sodass $p, q \in U_i$ gilt, dann ist M auch hausdorffsch.



Beweis von Satz 1.14. Wir beweisen zunächst, dass, falls eine solche Topologie auf M existiert, diese eindeutig sein muss. Wir beweisen dies, indem wir zeigen, dass, wenn $\mathcal{O}$ eine solche Topologie ist, eine Menge $X \in \mathcal{O} \iff x_i(X \cap U_i)$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist für alle $i \in I$. Angenommen, $\mathcal{O}$ ist eine Topologie auf M , sodass U_i alle offenen Mengen sind und x_i alle Homöomorphismen sind. Sei $X \in \mathcal{O}$. Dann ist $X \cap U_i \in \mathcal{O}$ und somit ist $x_i(X \cap U_i)$ in $\mathbb{R}^n$ offen für alle i . Umgekehrt sei $X \subset M$ so, dass $x_i(U_i \cap X) \subset \mathbb{R}^n$ für alle i offen ist. Dies bedeutet, dass $x_i \circ x_i^{-1}(U_i \cap X)$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist und somit X in M offen ist. Wenn also eine durch die Bedingungen des Satzes gegebene Topologie $\mathcal{O}$ existiert, muss sie eindeutig sein.

Um die Existenz zu beweisen, zeigen wir, dass die Menge

$$\mathcal{O} = \{X \subset M \mid x_i(X \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen } \forall i \in I\}$$

eine Topologie auf M beschreibt. Offensichtlich gilt $\emptyset, M \in \mathcal{O}$, da $x_i(M \cap U_i) = x_i(U_i)$ gemäß Bedingung 2 offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Wenn $X_j \in \mathcal{O}$, $j \in J$ gilt, dann gilt für alle $i \in I$:

$$x_i \left(\left(\bigcup_{j \in J} X_j \right) \cap U_i \right) = x_i \left(\bigcup_{j \in J} (X_j \cap U_i) \right) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{x_i(X_j \cap U_i)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n}$$

und daher liegen beliebige Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$. **Den Teil über die endliche Schnittmenge solltest du selbst beweisen.** Somit ist das oben beschriebene $\mathcal{O}$ tatsächlich eine Topologie auf M .

Nun wollen wir zeigen, dass in dieser Topologie U_i offene Mengen sind. Dies folgt jedoch klar aus Bedingung 2. Wir beweisen nun, dass x_i für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind. Sei $x_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung für ein $i \in I$. Wir kennen nur Teil 3. Sei $Y \subset V_i$ offen. Dann gilt für jedes $j \in I$:

$$\begin{aligned} x_j(x_i^{-1}(Y) \cap U_j) &= x_j(x_i^{-1}(Y \cap x_i(U_i \cap U_j))) \\ &= \underbrace{(x_j \circ x_i^{-1})}_{\text{stetig}} Y \cap \underbrace{x_i(U_i \cap U_j)}_{\substack{\text{offen gemäß Teil 2.} \\ \text{offen}}} \end{aligned}$$

ist offen in $\mathbb{R}^n$ und daher gemäß der Definition von $\mathcal{O}$ gilt $x_i^{-1}(Y) \in \mathcal{O}$. Analog lässt sich zeigen, dass auch x_i^{-1} stetig ist, womit die Aussage bewiesen ist.

Nehmen wir nun an, die Indexmenge $I' \subset I$ sei abzählbar und bedecke M . Da die Topologie eindeutig ist, ergeben I und I' dieselbe Topologie auf M . Nun hat die Topologie jedes $V_i \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis B_i . Dann ist $x_i^{-1}(B_i)$ eine abzählbare Basis der Topologie von U_i und somit ist $\bigcup_{i \in I'} x_i^{-1} B_i$ eine abzählbare Basis von M .

Schließlich seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$ und sei $i \in I$ so, dass $p, q \in U_i$. Da $\mathbb{R}^n$ Hausdorff ist, können wir $V_1, V_2 \subset V_i$ so wählen, dass sie offen sind, $x_i(p) \in V_1$, $x_i(q) \in V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt. Dann trennen $x_i^{-1}(V_1)$ und $x_i^{-1}(V_2)$ p und q . $\square$

Beispiel 1.15 (Reeller projektiver Raum). Wir definieren den reellen projektiven Raum wie folgt:

$$\mathbb{RP}^n = \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist ein eindimensionaler Unterraum}\}, \quad (1.1)$$

das heißt, $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir verwenden die Quotiententopologie auf $\mathbb{RP}^n$ unter Verwendung der Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$, die jeden Punkt p in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ auf den von p aufgespannten Unterraum abbildet; mit anderen Worten, wir verwenden die Äquivalenzrelation $p \sim \lambda p$, $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Wir stellen Koordinatensysteme für $\mathbb{RP}^n$ vor. Für jedes $i = 1, \dots, n+1$ sei

$$\overline{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ wobei } p^i \neq 0,$$

und sei

$$U_i = \pi(\overline{U}_i).$$

Aufgrund der Eigenschaften von Quotientenabbildungen ist $U_i \subset \mathbb{RP}^n$ offen, und wir definieren $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\phi_i([p^1, \dots, p^{n+1}]) = \left(\frac{p^1}{p^i}, \dots, \frac{p^{i-1}}{p^i}, \frac{p^{i+1}}{p^i}, \dots, \frac{p^{n+1}}{p^i} \right).$$

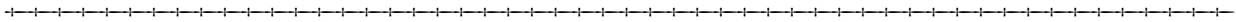
Diese Abbildung ist wohldefiniert. Da $\phi_i \circ \pi$ stetig ist, ist auch ϕ_i stetig; tatsächlich handelt es sich um eine Homöomorphie mit der durch

$$\phi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Geometrisch bedeutet $\phi([p]) = u$, dass $(u, 1)$ der Punkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, an dem die Gerade $[p]$ die Hyperfläche schneidet, auf der $p^i = 1$ gilt. Da nun die Mengen $U_1, \dots, U_{n+1}$ $\mathbb{RP}^n$ abdecken, sehen wir, dass (U_i, ϕ_i) eine Koordinatensystemdarstellung von $\mathbb{RP}^n$ bilden und es so zu einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit machen.

Beispiel 1.16 (Produktmannigfaltigkeiten). Sind M_1 und M_2 topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n_1 bzw. n_2 , so ist $M_1 \times M_2$ wiederum eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2$.

Ein einfaches Beispiel für das oben beschriebene Phänomen ist der n -**Torus** für $n \in \mathbb{N}$. Er wird mit $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}}$ bezeichnet und ist eine topologische n -Mannigfaltigkeit.



2. Glatte Strukturen

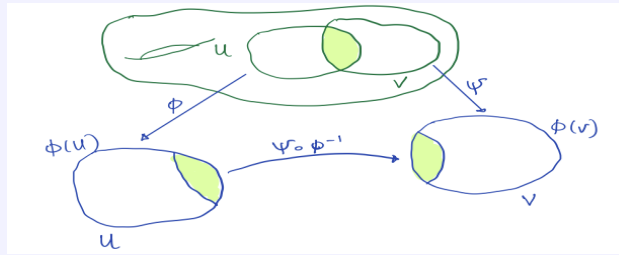
Wir erinnern an die Definition glatter Abbildungen zwischen euklidischen Räumen. Zur Erinnerung: Sind $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, so wird eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ als **glatt** oder C^∞ bezeichnet, wenn jede ihrer Teilfunktionen stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Ist f darüber hinaus eine Bijektion und ist auch f^{-1} glatt, so spricht man von einem **glatten Diffomorphismus**. Da jede topologische Mannigfaltigkeit lokal wie eine offene Teilmenge eines euklidischen Raums aussieht, ist es sinnvoll, zu versuchen, glatte Abbildungen auf einer topologischen Mannigfaltigkeit zu definieren.

Wir möchten definieren, wann eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist, wobei M eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dazu müssen wir der Mannigfaltigkeit eine genauere Struktur geben. Wir beginnen mit folgendem

Definition 2.1. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und seien (U, ϕ) und (V, ψ) zwei Koordinatensysteme, sodass $U \cap V \neq \emptyset$ gilt. Die Abbildung

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (2.1)$$

wird als **Übergangsabbildung von ϕ nach ψ** bezeichnet.



Wir definieren Folgendes

Definition 2.2. Seien $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ und $\psi : V \rightarrow \tilde{V}$ zwei Koordinatensysteme auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Sie werden als **glatt kompatibel** oder C^∞ -**kompatibel** bezeichnet, wenn

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (2.2)$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Nachdem wir die Definition glatt kompatibler Koordinatensysteme verstanden haben, definieren wir nun, was ein Atlas und ein glatter Atlas ist.

Definition 2.3. Eine Menge von Kartierungen $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$, $i \in I$, von M wird als **Atlas** von M bezeichnet, wenn die Definitionsbereiche der Kartierungen M abdecken, d. h.

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M.$$

Ein Atlas $\mathcal{A}$ wird als **glatter Atlas** oder als C^∞ -**Atlas** bezeichnet, wenn beliebige zwei Kartierungen in $\mathcal{A}$ C^∞ -kompatibel sind.

Um zu beweisen, dass ein Atlas ein glatter Atlas ist, müssten wir lediglich nachweisen, dass jede Übergangsabbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ glatt ist, wann immer (U, ϕ) und (V, ψ) Koordinatensysteme in $\mathcal{A}$ sind, da $\psi \circ \phi^{-1}$ offensichtlich ein Diffomorphismus ist, weil $(\psi \circ \phi^{-1})^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}$ ist und letztere eine der Übergangsabbildungen ist, die glatt ist.

2.1 Beispiele für glatte Atlanten

Beispiel 2.4. Sei $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\mathcal{A} = \{id : U \rightarrow U\}$ ein C^∞ -Atlas.

Beispiel 2.5. Für $M = S^n$ erinnern wir uns an die Kartierungen aus Beispiel ???. Betrachten wir $\mathcal{A} = \{(x_1 : U_1 \rightarrow$

$V_1)$, $(x_2 : U_2 \rightarrow V_2)$, wobei $U_1 = S^n \setminus \{s\}$ und $U_2 = S^n \setminus \{n\}$. Wir erinnern uns auch daran, dass

$$\begin{aligned} x_1(y) &= \frac{2}{1+y^0} \hat{y}, \quad \text{wobei } y = (y^0, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ x_1^{-1}(z) &= \frac{1}{4 + \|z\|^2} (4 - \|z\|^2, 4z), \quad z \in S^n, \\ x_2(y) &= \frac{2}{1-y^0} \hat{y}. \end{aligned}$$

Somit gilt für jedes $v \in x_1(U_1 \cap U_2)$:

$$\begin{aligned} x_2 \circ x_1^{-1}(v) &= x_2 \left(\frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}, \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \right) \\ &= \frac{2}{1 - \frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}} \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \\ &= \frac{4v}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Somit ist $x_2 \circ x_1^{-1} C^\infty$. Analog ist auch $x_1 \circ x_2^{-1}$ glatt, wodurch x_1 und x_2 C^∞ -kompatibel sind und $\mathcal{A}$ ein C^∞ -Atlas für S^n ist.

Beispiel 2.6. Erinnern wir uns an den reellen projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ und seine Koordinatensysteme aus Beispiel ???. Man kann berechnen, dass für beispielsweise $i > j$ und $(u^1, \dots, u^n) \in (U_i \cap U_j)$ gilt:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left(\frac{u^1}{u^j}, \dots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^{i+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^n}{u^j} \right),$$

die lediglich rationale Funktionen und somit C^∞ sind. Somit erhalten wir einen glatten Atlas für $\mathbb{RP}^n$.

Wir werden später weitere Beispiele betrachten. Aber erinnern wir uns vorerst daran, dass wir diesen Begriff des glatten Atlas eingeführt haben, weil wir definieren wollten, wann eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Wir möchten sagen, dass $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist, wenn $f \circ \phi^{-1}$ im Sinne der gewöhnlichen Analysis für jede Koordinatenkarte (U, ϕ) im Atlas glatt ist. Diese Definition weist ein kleines Problem auf. Es kann vorkommen, dass verschiedene Atlanten zu „derselben“ glatten Struktur auf M führen. Um Redundanzen zu vermeiden, geben wir die folgende Definition an.

Definition 2.7. Ein C^∞ -Atlas $\mathcal{A}_{max}$ wird als **maximaler Atlas** oder als **differenzierbare Struktur auf M** bezeichnet, wenn jede Karte, die glatt kompatibel mit allen Karten in $\mathcal{A}_{max}$ ist, bereits in $\mathcal{A}_{max}$ enthalten ist. Mit anderen Worten:

$$\mathcal{A}_{max} := \{\text{Karten } (U, \phi) \text{ im Atlas } \mathcal{A} \text{ von } M \mid \phi \text{ ist } C^\infty\text{-kompatibel mit allen Karten in } \mathcal{A}\}. \quad (2.3)$$

Offensichtlich ist $\mathcal{A}_{max}$ ebenfalls ein C^∞ -Atlas. Sind ϕ, ψ zwei Kartierungen von M , die mit allen Kartierungen in $\mathcal{A}$ C^∞ -kompatibel sind, dann sind ϕ und ψ untereinander C^∞ -kompatibel, denn wenn $x \in \phi(U \cap V)$, dann existiert eine Kartierung $\tau : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ in $\mathcal{A}$ existiert, sodass $\phi^{-1}(x) \in \tilde{U}$ gilt. In der Nähe von x gilt also

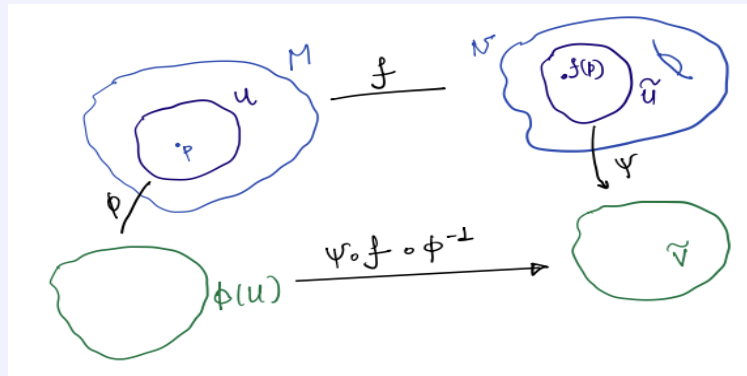
$$\psi \circ \phi^{-1} = \underbrace{(\psi \circ \tau^{-1})}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\tau \circ \phi^{-1})}_{C^\infty}.$$

Definition 2.8. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit. Ein Paar $(M, \mathcal{A}_{max})$, wobei $\mathcal{A}_{max}$ ein maximaler Atlas auf M ist, wird als **n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit** bezeichnet.

Mit dieser Definition können wir nun endlich die Differenzierbarkeit von Funktionen definieren.

Definition 2.9. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ wird als **k -mal stetig differenzierbar in p** oder **C^k in p** bezeichnet, wenn es eine Koordinateneinteilung $\phi : U \rightarrow V \in \mathcal{A}_{\max}(M)$ mit $p \in U$ und eine weitere Koordinateneinteilung $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \in \mathcal{A}_{\max}(N)$ mit $f(p) \in \tilde{U}$ und $f(U) \subset \tilde{U}$ existiert, sodass

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \tilde{V} \text{ ist } C^k. \quad (2.4)$$



Definition 2.10. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Homöomorphie $f : M \rightarrow N$ wird als **C^k -Diffeomorphismus** bezeichnet, wenn sowohl f als auch f^{-1} C^k sind. In diesem Fall werden M und N als **C^k -diffeomorph** bezeichnet.

Bevor wir uns Beispiele für glatte Abbildungen ansehen, wollen wir uns noch weitere Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten ansehen.

Bemerkung 2.11. Wir betonen, dass eine glatte Struktur eine zusätzliche Information ist, die wir einer topologischen Mannigfaltigkeit M zuordnen. Wenn wir also sagen, dass M eine „glatte Mannigfaltigkeit“ ist, dann ist bereits impliziert, dass ein glatter maximaler Atlas vorgegeben ist. Es kann vorkommen, dass eine gegebene topologische Mannigfaltigkeit viele verschiedene glatte Strukturen hat. Betrachten wir zum Beispiel die Homöomorphie

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = x^3.$$

Der Atlas $(\mathbb{R}, \psi)$ ist eine glatte Struktur auf $\mathbb{R}$, aber er ist **nicht C^∞ -kompatibel** mit der Standard-glatte Struktur $(\mathbb{R}, id)$ auf $\mathbb{R}$, denn

$$id \circ \psi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

am Punkt $\{0\}$ nicht glatt ist. Somit sind die beiden glatten Strukturen unterschiedlich.

Aufgabe 2.12. Sei M eine nichtleere topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Angenommen, M hat eine glatte Struktur. Zeige, dass M unzählbar viele verschiedene glatte Strukturen hat.

Bemerkung 2.13. Tatsächlich kann es vorkommen, dass eine topologische Mannigfaltigkeit überhaupt keine glatten Strukturen hat. Das erste Beispiel wurde von Kervaire [Ker60] für eine kompakte 10-dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben.

Obwohl es verlockend erscheint, eine glatte Struktur durch die explizite Beschreibung eines maximalen glatten Atlas zu definieren, ist dies nicht immer zweckmäßig, da dieser viele Karten enthalten kann und es dadurch schwieriger werden könnte, die Angaben explizit zu überprüfen. Dies lässt sich durch das folgende Ergebnis beheben.

Vorschlag 2.14. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

1. Jeder glatte Atlas $\mathcal{A}$ von M ist in einem eindeutigen maximalen glatten Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ enthalten. Ein solcher $\mathcal{A}_{\max}$ wird auch als die **durch $\mathcal{A}$ bestimmte glatte Struktur** bezeichnet.
2. Zwei glatte Atlanten von M bestimmen genau dann dieselbe glatte Struktur, wenn ihre Vereinigung ein glatter Atlas ist.

Proof. 1. Wir haben bereits die Existenz eines solchen $\mathcal{A}_{max}$ bewiesen. Um die Eindeutigkeit zu beweisen, beachte man, dass, wenn $\mathcal{B}$ ein beliebiger anderer maximaler glatter Atlas ist, der $\mathcal{A}$ enthält, dann jede seiner Karten mit jeder Karte in $\mathcal{A}$ C^∞ -kompatibel ist und somit per Definition $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{max}$ gilt. Analog gilt $\mathcal{A}_{max} \subset \mathcal{B}$ und somit $\mathcal{A}_{max} = \mathcal{B}$.

2. Übung. □

2.2 Weitere Beispiele

Beispiel 2.15. Sei M^0 eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wissen, dass es sich um einen abzählbaren Raum mit diskreter Topologie handelt. Die Koordinatensätze sind $\{(p, \phi) \mid p \in M, \phi : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0\}$ und sie erfüllen trivialerweise die Kompatibilitätsbedingungen, sodass M^0 eine eindeutige glatte Struktur besitzt.

Beispiel 2.16. Die durch den Atlas $(\mathbb{R}^n, id)$ bestimmte glatte Struktur auf $\mathbb{R}^n$ wird als die **Standard-glatte Struktur** auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Beispiel 2.17. Sei V^n ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Da jede Norm auf V eine Topologie bestimmt und alle Normen äquivalent sind, verwenden wir diese Topologie, um V als topologische Mannigfaltigkeit zu betrachten. Wir zeigen im Folgenden, dass V eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine geordnete Basis von V und definiere den Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ durch

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n x^i e_i.$$

Diese Abbildung ist ein Homöomorphismus, und somit ist (V, ϕ^{-1}) eine Koordinatensystem.

Angenommen, $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ sei eine beliebige andere Basis und $\phi'(x) = \sum_{i=1}^n x^i e'_i$ sei der entsprechende Isomorphismus. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass es eine invertierbare Matrix $[A_j^i]$ gibt, sodass für jedes i gilt: $e_i = \sum_{j=1}^n A_j^i e'_j$. Die Übergangsabbildung ist dann gegeben durch

$$\phi'^{-1} \circ \phi(x) = x', \quad \text{wobei } x' \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n x^{j'} e'_j = \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i,j=1}^n x^i A_j^i e'_j.$$

Mit anderen Worten: Jede Abbildung, die $x \mapsto x'$ sendet, ist eine invertierbare lineare Abbildung und somit ein Diffeomorphismus, was beweist, dass beliebige zwei Koordinatensysteme C^∞ -kompatibel sind. Die Menge aller solcher Koordinatensysteme definiert eine glatte Struktur auf V und macht es zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.18. Sei $M(n \times m, \mathbb{R})$ der Raum der reellen $n \times m$ -Matrizen. Da es sich hierbei um einen reellen Vektorraum der Dimension nm handelt, ist er gemäß dem vorherigen Beispiel eine glatte nm -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.19 ($GL(n, \mathbb{R})$). Der Raum der $n \times n$ -reellen invertierbaren Matrizen wird als **allgemeine lineare Gruppe** $GL(n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Da dies eine offene Teilmenge der Menge aller Matrizen ist, handelt es sich um eine n^2 -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.20. Sind $M_1, \dots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n_1, \dots, n_k$, so wissen wir bereits, dass $M_1 \times \dots \times M_k$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ist. Die Koordinatensysteme haben die Form $(U_1 \times \dots \times U_k, \phi_1 \times \dots \times \phi_k)$. Wir stellen fest, dass, wenn es zwei solche Koordinatensysteme gibt, dann gilt:

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_k) \circ (\phi_1 \times \dots \times \phi_k)^{-1} = (\psi_i \circ \phi_i^{-1}) \times \dots \times (\psi_k \circ \phi_k^{-1}),$$

wodurch $M_1 \times \dots \times M_k$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit wird. Zum Beispiel ist der n -Torus T^n eine glatte Mannigfaltigkeit.

Wir können eine Version von Satz 1.14 für glatte Mannigfaltigkeiten wie folgt schreiben.

Lemma 2.21. Sei M eine Menge und nehmen wir an, wir haben eine Sammlung $\{U_i\}_{i \in I}$, wobei I abzählbar ist, von Teilmengen von M mit Abbildungen $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass Folgendes gilt.

- (a) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (b) Für alle i ist ϕ_i eine Bijektion zwischen U_i und einer offenen Teilmenge $V_i \subset \mathbb{R}^n$.
- (c) Für alle i, j sind die Mengen $\phi_i(U_i \cap U_j)$ und $\phi_j(U_i \cap U_j)$ in $\mathbb{R}^n$ offen.
- (d) Wenn $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ für einige i, j gilt, dann ist die Abbildung $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ glatt.
- (e) Für Punkte $p, q \in M$ gilt entweder, dass es ein U_i gibt, in dem p und q liegen, oder es gibt verschiedene U_i und U_j mit $p \in U_i$ und $q \in U_j$.

Dann besitzt M eine eindeutige glatte Struktur, sodass jedes (U_i, ϕ_i) eine glatte Koordinatenzahl ist.

Proof. Der Beweis ähnelt dem Beweis von Satz 1.14, wobei die Glattheitsbedingung durch Punkt (d) oben gewährleistet ist. $\square$

Wir können das vorstehende Lemma verwenden, um ein Beispiel für glatte Mannigfaltigkeiten zu geben, die die reellen projektiven Räume verallgemeinern.

Beispiel 2.22 (Grassmannsche Mannigfaltigkeiten). Sei V^n ein reeller Vektorraum und sei

$$G_k(V) = \{W \subset V \mid W \text{ ist ein } k\text{-dimensionaler Unterraum}\}. \quad (2.5)$$

Die Menge $G_k(V)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ und wird Grassmannsche Mannigfaltigkeit genannt. Offensichtlich gilt $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$.

Wir zeigen, dass $G_k(V)$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Seien P und Q komplementäre Unterräume von V der Dimensionen k bzw. $n-k$, sodass $V = P \oplus Q$ gilt. Ist $f : P \rightarrow Q$ eine lineare Abbildung, dann ist $\Gamma(f) \subset V$ ein k -dimensionaler Unterraum mit

$$\Gamma(f) = \{v + fV \mid v \in P\}.$$

Man kann nachweisen, dass $\Gamma(f) \cap Q = \{0\}$. Umgekehrt gilt: Ist $S \subset V$ ein beliebiger Unterraum mit trivialer Schnittmenge mit Q , dann ist $S = \Gamma(f)$, wobei $f = (\pi_{Q|S}) \circ (\pi_{P|S})^{-1}$ ist, wobei $\pi_T : V \rightarrow T$ die Projektion ist.

Nachdem dies festgestellt ist, setzen wir

$$L(P, Q) = \{L : P \rightarrow Q \mid L \text{ linear}\},$$

was ein Vektorraum ist, und setzen $U_Q \subset G_k(V)$, wobei U_Q jene k -dimensionalen Unterräume von V sind, die eine triviale Schnittmenge mit Q haben. Da $P \in U_Q$ gilt, ist dieser nicht leer. Die Zuordnung $f \mapsto \Gamma(f)$ ergibt eine Abbildung

$$\Gamma : L(P, Q) \rightarrow U_Q,$$

die tatsächlich eine Bijektion ist. Bezeichnen wir $\Gamma^{-1} = \phi$. Da $L(P, Q) \cong M((n-k) \times k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$ gilt, ist (U_Q, ϕ) eine Koordinatensystem für $G_k(V)$ und Teil (b) von Lemma 2.21 ist erfüllt.

Sei (P', Q') ein weiteres Paar von Unterräumen wie zuvor und sei $\phi' : U_{Q'} \rightarrow L(P', Q')$ die entsprechende Kartierung ist, dann stellen wir zunächst fest, dass $\phi(U_Q \cap U_{Q'}) \subset L(P, Q)$ die Menge aller linearen Abbildungen $f : P \rightarrow Q$ ist, für die $\Gamma(f) \cap Q' = \{0\}$. Diese Menge $\phi(U_Q \cap U_{Q'})$ ist in $L(P, Q)$ offen. Dies lässt sich wie folgt zeigen. Sei $f \in \phi(U_Q \cap U_{Q'})$, was bedeutet, dass $\Gamma(f) \cap Q' = \{0\}$. Bezeichnen wir mit $I_f : P \rightarrow V$, $I_f(p) = p + fv$, so ist dies eine bijektive Abbildung von P nach $\Gamma(f)$. Außerdem ist $\ker \pi_{P'} = Q'$, sodass unter Verwendung der linearen algebraischen Tatsache, dass

$$\text{Rang}(A \circ B) \leq \text{Rang}(B) \text{ mit Gleichheit} \iff \text{Im}(B) \cap \ker A = \{0\},$$

sehen wir, dass $\pi_{P'} \circ I_f$ vollen Rang hat, und da die entsprechende Matrix stetig von f abhängt, sehen wir, dass die Menge aller solchen f mit $\Gamma(f) \cap Q' = \{0\}$ offen ist. Somit gilt auch Teil (c) von Lemma 2.21.

Wir zeigen nun, dass die Übergangsabbildungen glatt sind, und überlassen die weiteren Einzelheiten als Übung. Wir wollen zeigen, dass $\phi' \circ \phi^{-1}$ eine glatte Abbildung auf $\phi(U_Q \cap U_{Q'})$ ist. Sei $f \in \phi(U_Q \cap U_{Q'}) \subset L(P, Q)$ eine beliebige Funktion. Sei S der Unterraum $\Gamma(f) \subset V$. Wenn $f' = \phi' \circ \phi^{-1}(f)$, dann gilt $f' = (\pi_{Q'|S}) \circ (\pi_{P'|S})^{-1}$.

Irgendwie möchten wir diese Abbildung mit f in Verbindung bringen. Dies lässt sich wie folgt bewerkstelligen: Man beachte, dass $I_f : P \rightarrow S = \Gamma(f)$ ein Isomorphismus ist, also

$$f' = (\pi_{Q'_S}) \circ I_f \circ (I_f)^{-1} \circ (\pi_{P'_S})^{-1} = (\pi_{Q'} \circ I_f) \circ (\pi_{P'} \circ I_f)^{-1}.$$

Nun können wir eine beliebige Basis für V wählen und eine Basis für die Räume P, P', Q, Q' aufschreiben; dann seien $A : P \rightarrow P', B : P \rightarrow Q', C : Q \rightarrow P'$ und $D : Q \rightarrow Q'$ die linearen Abbildungen mit

$$A = \pi_{P'_P}, B = \pi_{Q'_P}, C = \pi_{P'_Q}, \text{ und } D = \pi_{Q'_Q}.$$

So erhalten wir beispielsweise für $p \in P$

$$(\pi_{P'} \circ I_f)p = (A + Cf)p, (\pi_{Q'} \circ I_f)p = (B + Df)p,$$

und somit $f' = (B + Df)(A + Cf)^{-1}$. Damit sind wir fertig, denn all dies sind Matrizen, deren Einträge lediglich rationale Funktionen sind, die von f abhängen, und folglich hängen die Matrixeinträge von f' glatt von denen von f ab. Da f glatt war, ist es die Übergangsabbildung ebenfalls. Somit ist auch Teil (d) von Lemma 2.21 erfüllt.

Teil (a) folgt ebenfalls, denn wenn beispielsweise $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine beliebige Basis von V ist und $F \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|F| = k$. Dann gilt: Wenn $V_F = \text{lineare Spannungsgruppe}\{e_i, i \in F\}$ und wir $U_F = U_{V_F}$ mit dem entsprechenden $\phi_{V_F} = \phi_F$ setzen, dann ist die endliche Menge $\{(U_F, \phi_F) \mid F \subset \{1, \dots, n\}, |F| = k\}$ ist ein glatter Atlas von $G_k(V)$. Analog lässt sich nachweisen, dass $G_k(V)$ tatsächlich Hausdorff ist und somit die Grassmannsche Mannigfaltigkeit eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

XXXXXX

3. Eigenschaften glatter Abbildungen

Nachdem wir nun verstanden haben, was glatte Abbildungen sind, wollen wir versuchen, einige grundlegende Eigenschaften zu formulieren und zu beweisen. Im weiteren Verlauf des Kurses werden wir weitere Eigenschaften glatter Abbildungen kennenlernen.

Vorschlag 3.1 (Glattheit ist eine lokale Eigenschaft). Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- (a) Wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \ni p$ hat, sodass $f|_U$ glatt ist, dann ist f auf M glatt.
- (b) Umgekehrt gilt: Ist f glatt, so ist ihre Beschränkung auf jede offene Menge $U \subset M$ glatt.

Proof. Dies ergibt sich klar aus der Definition. □

Vorschlag 3.2. Seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten. Dann gilt Folgendes.

1. Jede konstante Funktion ist eine glatte Abbildung.
2. Die Identitätsabbildung $id_M : M \rightarrow M$ ist glatt.
3. Ist $U \subset M$ offen, dann ist die Inklusionsabbildung $i : U \hookrightarrow M$ glatt.
4. Ist $f : M \rightarrow N$ glatt und $g : N \rightarrow P$ glatt, dann ist $g \circ f : M \rightarrow P$ glatt.

Proof. Wir beweisen nur (1) und (4) und überlassen den Rest als Übung. Sei $p \in M$ und nehme an, dass (U, ϕ) ein Koordinatensystem ist, das p enthält. Wenn $c : M \rightarrow N$ eine konstante Funktion ist mit $c(p) = c \in N$, $\forall p \in M$ und (V, ψ) eine Kartierung ist, die c enthält, dann gilt

$$\psi \circ c \circ \phi^{-1}(x) = \psi(c) \in \psi(V),$$

und ist somit eine konstante Funktion zwischen Teilmengen euklidischer Räume und daher glatt.

Zum Beweis von (4) nehmen wir an, dass (V, ψ) eine Kartierung ist, die $f(p)$ enthält, und (W, τ) eine Kartierung ist, die $g(f(p))$ enthält, wobei $g(V) \subset W$ gilt und $\tau \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \rightarrow \tau(W)$ glatt ist. Beachten wir, dass $f^{-1}(V) \ni p$ eine offene Menge in M ist; aufgrund der Glattheit von f wissen wir daher, dass es eine glatte Koordinatensystem (U, ϕ) von M gibt, sodass $p \in U \subset f^{-1}(V)$ gilt und $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ glatt ist. Außerdem gilt $g(f(U)) \subset g(V) \subset W$ und

$$\tau \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = \tau \circ (g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f) \circ \phi^{-1} = (\tau \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}),$$

ist glatt und daher ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ glatt. □

Wir haben außerdem Folgendes

Vorschlag 3.3. Seien $M_1, \dots, M_k$ und N glatte Mannigfaltigkeiten. Wenn $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ die Projektionsabbildung auf den Faktor M_i ist, dann ist eine Abbildung $f : N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ genau dann glatt, wenn $f_i = \pi_i \circ f : N \rightarrow M_i$ glatt ist.

Proof. Übung. □

Betrachten wir ein Beispiel. Sei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Definieren wir die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ durch $f(t) = \exp 2\pi i t$. Verwenden wir die Winkelkoordinate θ für S^1 , so gilt in Bezug auf jede Koordinatendarstellung in diesem Koordinatensystem:

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(t) = 2\pi t + c, \quad c \text{ Konstante.}$$

Somit ist f eine glatte Abbildung. Analog dazu ist $f^n : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, gegeben durch $f^n(x^1, \dots, x^n) = (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$, eine glatte Abbildung.

Aufgabe 3.4. Beweise, dass die natürliche Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ eine glatte Abbildung ist.

4. Tangentialvektoren und Tangentialräume

Erinnern wir uns daran, dass die Definition einer glatten Mannigfaltigkeit sowie einer glatten Abbildung aus der Perspektive motiviert war, zu definieren, was es bedeuten könnte, dass eine Funktion f differenzierbar ist. Wir kehren noch einmal zu unseren Studien der Differentialrechnung zurück und erinnern uns daran, dass die Ableitung einer Abbildung die *beste lineare Approximation* der Abbildung war. In euklidischen Räumen macht eine lineare Approximation sowohl theoretisch als auch bildlich Sinn. Was könnte der geeignete Begriff einer linearen Approximation auf einer Mannigfaltigkeit sein? Beginnen wir mit dem einfachsten möglichen Fall.

Wir erinnern zunächst daran, dass, wenn $p \in M$ ist, unter einer Kurve auf M , die durch p verläuft, eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ zu verstehen ist. Ist die Abbildung differenzierbar/glatt, so sagen wir, dass die Kurve differenzierbar/glatt ist.

Definition 4.1. Ein **Tangentialvektor** auf M am Punkt $p \in M$ ist eine **Äquivalenzklasse** differenzierbarer Kurven $[\gamma]$, die durch p verlaufen, wobei $\gamma_1 \sim \gamma_2$ gilt, wenn für eine Koordinatendarstellung $\phi : U \rightarrow V$ mit $p \in U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2)|_{t=0}. \quad (4.1)$$

Wir bezeichnen $[\gamma] = \gamma'(0)$.

Es ist offensichtlich, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Wir stellen außerdem fest, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Wenn (U', ψ) ein anderes Koordinatensystem ist, das p enthält, dann berechnen wir unter Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma))|_{t=0} = D(\psi \circ \phi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0},$$

wobei $D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Ableitung der Übergangsabbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ am Punkt $\phi(p)$ ist und eine invertierbare lineare Abbildung ist, da $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Abbildung mit einer glatten Inversen ist. Somit ist die Bedingung

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2)|_{t=0}$$

äquivalent zur Bedingung

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)|_{t=0}.$$

Definition 4.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Die Menge

$$T_p M = \{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ ist eine Kurve, die durch } p \text{ verläuft}\}$$

als der **Tangentialraum** von M in p bezeichnet.

Auch wenn die Definition eines Tangentialraums sehr geometrisch ist, gibt sie kaum Aufschluss darüber, um welche Art von Raum es sich bei $T_p M$ handelt. Der folgende Satz zeigt, dass es sich um einen n -dimensionalen Vektorraum handelt.

Vorschlag 4.3. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ mit einer Koordinatensystem (U, ϕ) , das p enthält. Der Tangentialraum $T_p M$ besitzt eine eindeutige Vektorraumstruktur, sodass die Abbildung

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n, [\gamma] \mapsto (\phi \circ \gamma)'(0) \quad (4.2)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Somit ist für jeden Punkt $p \in M$ der Tangentialraum $T_p M$ an diesem Punkt ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

Proof. Die Abbildung in (4.2) ist eindeutig definiert und injektiv. Für die Surjektivität müssten wir zeigen, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ eine Kurve existiert, deren Tangentialvektor v ist. Definieren wir $\gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$ und wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\phi(p) + tv \in \phi(U)$ gilt. Dann gilt

$$d\phi_p(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt} (\phi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\phi(p) + tv)|_{t=0} = v.$$

Die Abbildung ist zudem ein linearer Isomorphismus, und tatsächlich lässt sich die Vektorraumstruktur wie folgt explizit beschreiben: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \in T_p M$, dann gilt

$$a\gamma'_1(0) + b\gamma'_2(0) = (d\phi_p)^{-1}(ad\phi_p(\gamma'_1(0)) + bd\phi_p(\gamma'_2(0))).$$

Es bleibt also nur noch zu beweisen, dass die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ kartengunabhängig ist. Um dies zu zeigen, sei $(\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V})$ eine weitere Koordinatensystem mit $p \in \tilde{U}$. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung $d\psi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear in Bezug auf die durch ϕ induzierte Vektorraumstruktur ist. Wir haben jedoch bereits gesehen, dass

$$d\psi_p = \underbrace{D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}}_{\text{invertierbar linear}} \circ \underbrace{d\phi_p}_{\text{invertierbar linear}},$$

und somit ein Vektorraum-Isomorphismus ist. □

Wir können uns $T_p M$ als die lineare Approximation von M am Punkt p vorstellen.

Wir können nun die Differentialform einer differenzierbaren Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten definieren.

Lemma 4.4. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $p \in M$. Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung in der Nähe von p . Dann ist die Abbildung

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad \gamma'(0) \mapsto (f \circ \gamma)'(0), \quad (4.3)$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen $T_p M$ und $T_{f(p)} N$ ist. Die Abbildung df_p wird als **Differential von f am Punkt p** bezeichnet.

Proof. Sei (U, ϕ) eine Koordinatendarstellung von M , die p enthält, und sei $(\tilde{U}, \psi)$ eine Koordinatendarstellung von N , die $f(p)$ enthält. Wir berechnen unter Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} d\psi_{f(p)}((f \circ \gamma)'(0)) &= (\psi \circ f \circ \gamma)'(0) \\ &= ((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma))'(0) \\ &= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \cdot ((\phi \circ \gamma)'(0)) \\ &= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \cdot d\phi_p(\gamma'(0)). \end{aligned}$$

Die vorstehende Gleichung impliziert, dass

$$df_p = (d\psi_{f(p)})^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \cdot d\phi_p,$$

und somit wohldefiniert ist, d. h. unabhängig von der Wahl der Kurve γ und eine lineare Abbildung ist. □

Wir stellen fest, dass, wenn $U \subset M$ offen ist, die Differentialform der Einbettungsabbildung $i : U \hookrightarrow M$ der natürliche Isomorphismus $di : T_p U \rightarrow T_p M$ ist, der durch

$$\gamma'(0) \mapsto (i \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0),$$

und somit $T_p U = T_p M$.

Aufgabe 4.5. Beweisen Sie, dass, wenn M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten sind und $p \in M, q \in N$, dann

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \times T_q N$$

auf kanonische Weise gilt.

Erinnern wir uns daran, dass V ein Vektorraum ist; dann wird sein Dualraum mit V^* bezeichnet und ist der Raum der linearen Funktionalen auf V , d. h. der skalaren linearen Abbildungen auf V . Mit anderen Worten:

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R}), \text{ wobei } \text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}.$$

Somit definieren wir den **Kotangentenraum** an $p \in M$ als

$$T_p^*(M) = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}) = (T_p M)^*. \quad (4.4)$$

Die zuvor besprochenen Räume $T_p M$ und $T_p^* M$ besitzen, wenn man sie für alle Punkte von M zusammenfasst, selbst eine Mannigfaltigkeitsstruktur und sind nützliche Beispiele für mathematische Objekte, die als **Vektorbündel** bezeichnet werden. Wir werden später noch näher darauf eingehen, aber zunächst wollen wir uns mit Tangenten- und Kotangentenbündeln befassen.

4.1 Tangential- und Kotangentenbündel

Definition 4.6. Das **Tangentenbündel** TM einer glatten Mannigfaltigkeit M ist die (disjunkte) Vereinigung aller ihrer Tangentialräume:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

- Die Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$, die einen Tangentialraum $T_p M$ auf den Punkt p abbildet, wird als **Projektionsabbildung** bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass π surjektiv ist.
- Die Teilmenge von TM , die aus den Nullvektoren $0 \in T_p M$, $p \in M$ besteht, wird als **Nullschnitt** von TM bezeichnet.
- Der Tangentialraum $T_p M \subset TM$ wird als **Faser** über $p \in M$ bezeichnet.

Somit ist jede Faser des Tangentenbündels ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Auch wenn TM im Moment wie eine beliebige Menge aussieht, beweist das folgende Ergebnis, dass es nicht nur eine von M geerbte Topologie besitzt, sondern selbst eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung 4.7. Ein beliebiger Punkt von TM lässt sich als (p, v) darstellen, wobei $p \in M$ und $v \in T_p M$ gilt, wobei letzterer der Tangentialraum am Punkt p ist.

Satz 4.8. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Das Tangentenbündel TM kann auf natürliche Weise mit einer glatten Struktur von M versehen werden, wodurch es zu einer $2n$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit wird. In Bezug auf die glatte Struktur sind die Projektionsabbildung $\pi : TM \rightarrow M$, die Inklusionsabbildung $i : M \hookrightarrow TM$ als Nullschnitt sowie die natürlichen Inklusionen $i : T_p M \hookrightarrow TM$, $p \in M$ allesamt glatte Abbildungen.

Proof. Der erste Schritt bei der Beschreibung einer glatten Struktur auf TM besteht darin, einen Atlas anzugeben.

Behauptung 4.9. Sei (U, ϕ) eine Koordinatendarstellung auf M . Dann ergibt sich daraus eine Koordinatensystem $(TU, T\phi)$ auf TM , wobei $TU = \bigcup_{p \in U} T_p M$ und $T\phi : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ unter Verwendung der linearen Isomorphismen $d\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert ist:

$$TU \supset T_p M \ni X \mapsto (\phi(p), d\phi_p(X)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

Ist (V, ψ) eine weitere Koordinatensystem auf M , so ist die Übergangsabbildung zwischen den Koordinatensystemen $(TU, T\phi)$ und $(TV, T\psi)$ gegeben durch

$$T\psi \circ T\phi^{-1}(p, v) = (\psi \circ \phi^{-1}(p), D(\psi \circ \phi^{-1})(p)v).$$

Beweis von Behauptung 4.9. Übung.

Wir fahren mit dem Beweis des Satzes fort. Wir statten TM mit dem einzigen maximalen glatten Atlas aus, der alle Kartierungen der Form $(TU, T\phi)$ enthält, wobei (U, ϕ) Kartierungen auf M sind, gemäß der Behauptung 4.9. Die zweite Abzählbarkeit und die Hausdorff-Eigenschaft für TM folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von M und der Tatsache, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wiederum abzählbar ist. Somit ist TM eine $2n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Betrachten wir die Abbildung $\pi : TM \rightarrow M, (p, T_p M) \mapsto p$. Betrachten wir eine Koordinatenkarte $(TU, T\phi) \ni (p, T_p M)$, wobei die Koordinatenkarte (U, ϕ) den Punkt $\pi(p)$ enthält. Dann gilt

$$\phi \circ \pi \circ T\phi^{-1}(p, v) = \phi(p)$$

was eindeutig eine glatte Abbildung ist. Analog dazu sind beide Inklusionen glatte Abbildungen. $\square$

Definition 4.10. Das **Kotangentialbündel** einer Mannigfaltigkeit M ist ebenfalls eine $2n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und wird wie folgt definiert:

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Das Kotangentialbündel T^*M ist ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, was sich auf ähnliche Weise wie im Fall des Tangentialbündels beweisen lässt. Wir werden später mehr über Tangential- und Kotangentialbündel erfahren, aber wir werden sie weiterhin verwenden.

Wir können nun das Differential einer glatten Abbildung definieren.

Definition 4.11. Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Das **Differential von f** , df , ist die Abbildung

$$df : TM \rightarrow TN : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Die Beschränkung von df an jedem Punkt ist genau die in Lemma 4.4 beschriebene Abbildung df_p .

Der Beweis von Lemma 4.4 zeigt auch, dass, wenn M , N und f glatt sind, dies auch für df gilt.

Unter Verwendung der in der obigen Definition beschriebenen Formulierung von df als Abbildung zwischen Tangentialbündeln können wir nun einen einfachen Beweis für die sehr wichtige Kettenregel liefern.

Vorschlag 4.12 (Kettenregel). Für glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten gilt

$$d(g \circ f) = dg \circ df : TM \rightarrow TP.$$

An jedem Punkt $p \in M$, $f(p) \in N$, lautet dies

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p. \quad (4.5)$$

Proof. Wir beweisen (4.5). Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_p(\gamma'(0)) &= \frac{d}{dt}((g \circ f) \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(g \circ (f \circ \gamma))|_{t=0} \\ &= dg_{f(p)}((f \circ \gamma)'(0)) \quad (\text{Kettenregel in } \mathbb{R}^n) \\ &= dg_{f(p)}(df_p(\gamma'(0))). \end{aligned}$$

$\square$

Eine einfache Folgerung aus dem vorherigen Satz lautet wie folgt.

Folge 4.13. Ist $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so ist auch $df : TM \rightarrow TN$ ein Diffeomorphismus, und darüber hinaus gilt:

$$(df)^{-1} = d(f^{-1}) : TN \rightarrow TM.$$

Proof. Man beachte, dass $d(id_M) : TM \rightarrow TM$ genau die Abbildung id_{TM} ist und somit das Ergebnis aus der Anwendung der Kettenregel folgt:

$$id_{TM} = d(f \circ f^{-1}) = df \circ d(f^{-1}).$$

□

Wir geben außerdem die folgende Definition an.

Definition 4.14. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten wird als **lokaler C^k -Diffeomorphismus** bezeichnet, wenn für jedes $p \in M$ eine Umgebung $U \ni p$ und eine Umgebung $V \ni f(p)$ existieren, sodass $f_U : U \rightarrow V$ ein C^k -Diffeomorphismus ist.

Offensichtlich ist jeder C^k -Diffeomorphismus ein lokaler C^k -Diffeomorphismus, aber das Gegenteil ist nicht unbedingt wahr.

Beispiel 4.15. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Abbildung $f(t) = e^{2\pi i t}$. Dann ist f eine surjektive Abbildung, aber nicht injektiv, sodass sie niemals ein Diffeomorphismus sein kann. Sie ist jedoch ein lokaler C^∞ -Diffeomorphismus. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und betrachte $U = (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$ sowie $V = S^1 \setminus \{-f(t_0)\}$.

Beachte außerdem, dass, wenn f ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein linearer Isomorphismus und folglich ist $\dim(T_p M) = \dim(T_{f(p)} N)$ und somit $\dim M = \dim N$.

5. Derivation und Tangentialvektoren

In dieser Vorlesung betrachten wir eine weitere Möglichkeit, Tangentialvektoren zu definieren, und sprechen außerdem über Richtungsableitungen, die das Analogon zum Begriff der partiellen Ableitungen aus der Mehrvariablenrechnung darstellen. Dies wird bei der Durchführung konkreter Berechnungen nützlich sein.

Notation. Wir bezeichnen mit $C^k(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^k\}$

Definition 5.1 (Richtungsableitungen). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Sei $\gamma'(0) \in T_p M$ und $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren

$$\partial_{\gamma'(0)} f = df_p(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} \in \mathbb{R},$$

und nennen dies die **Richtungsableitung von f** in Richtung des Tangentialvektors $\gamma'(0)$.

Definition 5.2 (Ableitungen). Eine Abbildung $\partial : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ wird als Ableitung in p bezeichnet, wenn Folgendes gilt.

1. Lokalität: Wenn $\tilde{U} \subset U$ offen ist, $p \in \tilde{U}$ und $f \in C^\infty(U)$, dann

$$\partial f = \partial(f|_{\tilde{U}}).$$

2. $\mathbb{R}$ -Linearität: Wenn $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g \in C_p^\infty$ sind, dann gilt

$$\partial(af + bg) = a\partial f + b\partial g.$$

3. Leibniz-Regel: Wenn $f, g \in C_p^\infty$ sind, dann gilt

$$\partial(fg) = g\partial f + f\partial g.$$

Es ist klar, dass die üblichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$ in $\mathbb{R}^n$ Ableitungen sind. Tatsächlich wurde die Definition eingeführt, um Folgendes zu beweisen.

Vorschlag 5.3. Die Richtungsableitungen $\partial_{\gamma'(0)}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit sind Ableitungen.

Proof. Wir überprüfen lediglich die Leibniz-Regel, die sich im Wesentlichen aus der Leibniz-Regel in $\mathbb{R}^n$ ergibt. Wir haben

$$\begin{aligned} \partial_{\gamma'(0)}(fg) &= \frac{d}{dt}((fg) \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}((f \circ \gamma)(g \circ \gamma))|_{t=0} \\ &= (g \circ \gamma)(0) \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} + (f \circ \gamma)(0) \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)|_{t=0} \quad (\text{Leibnizsche Regel in euklidischen Räumen}) \\ &= g(p)\partial_{\gamma'(0)}f + f(p)\partial_{\gamma'(0)}g. \end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen die Menge **aller Derivationen in p mit** $\text{Der}(C_p^\infty)$. Dieser Raum ist ein reeller Vektorraum via

$$(\alpha\partial_1 + \beta\partial_2)(f) = \alpha\partial_1 f + \beta\partial_2 f.$$

Wir möchten noch eine andere Sichtweise auf Tangentialvektoren gewinnen, und das nächste Lemma setzt genau hier an.

Lemma 5.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Die Abbildung

$$\partial : T_p M \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty), \quad \gamma'(0) \mapsto \partial_{\gamma'(0)},$$

ist linear.

Beweis. Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Wir müssen die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ verwenden, um die Linearität der Abbildung zu überprüfen; dass sie wohldefiniert ist, ist klar. Das heißt, wir müssen zeigen, dass

$$\partial \circ (d\phi|_p)^{-1}$$

linear ist. Sei dazu $v \in \mathbb{R}^n$ und setze

$$\gamma(t) := \phi^{-1}(\phi(p) + tv).$$

Für $f \in C_p^\infty$ berechnen wir

$$\begin{aligned} (\partial \circ (d\phi|_p)^{-1}(v))(f) &= df|_p((d\phi|_p)^{-1}(v)) \\ &= df|_p(\gamma'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv)) \right|_{t=0} \\ &= \langle D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}, v \rangle. \end{aligned}$$

Dies ist ein Ausdruck, der linear in v ist. □

Damit können wir Tangentialvektoren als Derivationen auffassen; die Idee dabei ist, dass man zu einem Tangentialvektor die Richtungsableitung in dessen Richtung betrachtet.

Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann bilden $(d\phi|_p)^{-1}(e_1), \dots, (d\phi|_p)^{-1}(e_n)$ eine Basis von $T_p M$. Wie sieht diese Basis konkret aus? Wir berechnen

$$\partial_{(d\phi|_p)^{-1}(e_j)}(f) = \langle D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}, e_j \rangle = \left. \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} =: \left. \frac{\partial f}{\partial x^j} \right|_p,$$

wobei wir die Notation leicht missbrauchen und weiterhin $f \circ \phi^{-1} = f$ schreiben, also die Koordinatendarstellung von f in der Karte (U, ϕ) meinen.

Dies zeigt, dass für jede Karte (U, ϕ) auf M , wenn wir $(x^1, \dots, x^n)$ als Koordinaten auf U schreiben, gilt:

Zu jeder Karte (U, ϕ) gehören die Derivationen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p.$$

Tatsächlich erlaubt uns dies auch, das folgende Resultat zu beweisen, welches besagt, dass die Tangentialvektoren als Äquivalenzklassen dasselbe sind wie Derivationen.

Lemma 5.5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann ist die Abbildung

$$\partial : T_p M \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty), \quad \gamma'(0) \mapsto \partial_{\gamma'(0)},$$

ein **Isomorphismus**. Insbesondere ist jede Derivation eine Richtungsableitung, und für jede Karte $\phi : U \rightarrow V$ mit $p \in U$ ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

eine Basis von $\text{Der}(C_p^\infty)$.

Proof. Wir haben bereits gezeigt, dass ∂ tatsächlich eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen ist und dass wir bei gegebener Karte die Derivationen $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ erhalten. Wir zeigen nun, dass

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

eine Basis von $\text{Der}(C_p^\infty)$ bilden. Daraus wissen wir nämlich, dass die lineare Abbildung ∂ die Basis

$$(d\phi|_p)^{-1}(e_1), \dots, (d\phi|_p)^{-1}(e_n)$$

von $T_p M$ auf die Basis

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

von $\text{Der}(C_p^\infty)$ abbildet und somit ein Isomorphismus ist.

a) **Lineare Unabhängigkeit:** Sei

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = 0.$$

Wir müssen zeigen:

$$\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0.$$

Wähle

$$f = x^j.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha^i \left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p = \alpha^j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

b) **Erzeugendensystem:** Sei $\delta \in \text{Der}(C_p^\infty)$. Setze

$$\alpha^j := \delta(x^j) = \delta(\phi^j), \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Wir werden zeigen, dass

$$\delta = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p.$$

Übung: Beweisen Sie, dass jede Derivation auf konstanten Funktionen verschwindet.

Sei $f \in C_p^\infty$, und nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass

$$\phi(\tilde{U}) = B(\phi(p), r).$$

Genauer gesagt, da $f \in C^\infty(\tilde{U})$ mit $p \in \tilde{U}$ offen, wählen wir eine Umgebung $\tilde{\tilde{U}}$ von p mit

$$\tilde{\tilde{U}} \subset \tilde{U} \cap U$$

und nehmen an, dass ihr Bild eine offene Kugel ist. Wäre M gleich $\mathbb{R}^n$, so hätten wir zur Konstruktion einer Funktion den Satz von Taylor verwendet. Tatsächlich gilt:

Behauptung 5.6. Für jede Funktion $h \in C^\infty(B(q, r))$ existieren $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(q, r))$ mit

(i)

$$h(x) = h(q) + \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) g_i(x)$$

und

(ii)

$$\frac{\partial h}{\partial x^i}(q) = g_i(q).$$

Beweis der Behauptung: Für $x \in B(q, r)$ setze

$$w_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad w_x(t) := h(tx + (1-t)q).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h(x) - h(q) &= w_x(1) - w_x(0) \\ &= \int_0^1 \dot{w}_x(t) dt \quad (\text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung}) \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{tx+(1-t)q} \cdot (x^i - q^i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{tx+(1-t)q} dt}_{=: g_i(x)}. \end{aligned}$$

Wir gehen nun rückwärts vor und definieren g_i als die Funktion in der letzten Zeile der Gleichung, womit (i) bewiesen ist. Sobald wir (i) haben, folgt (ii) durch Differentiation. $\square$

Wir verwenden die oben bewiesene Behauptung mit $h = f \circ \phi^{-1}$. Also existieren $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(x(p), r))$, sodass

$$(f \circ \phi^{-1})(x) = (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) + \sum_{i=1}^n (\phi^i - \phi^i(p)) \cdot g_i(x)$$

und

$$\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) = g_i(\phi(p)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \delta(f) &\stackrel{\text{Lokalität}}{=} \delta(f|_{\tilde{U}}) \\
 &= \delta\left(f(p) + \sum_{i=1}^n (\phi^i - \phi^i(p))(g_i \circ \phi)\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \delta((\phi^i - \phi^i(p))(g_i \circ \phi)) \\
 &\stackrel{\text{Leibniz-Regel}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\delta(\phi^i - \phi^i(p)) \cdot g_i(\phi(p)) + \underbrace{(\phi^i - \phi^i(p))|_p}_{=0} \delta(g_i \circ \phi) \right) \\
 &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^n \delta(x^i) g_i(x(p)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.
 \end{aligned}$$

□

Von nun an identifizieren wir $T_p M$ mit $\text{Der}(C_p^\infty)$ über den Isomorphismus ∂ . Zum Beispiel schreiben wir für $\xi \in T_p M$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

anstelle von

$$\partial_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{und} \quad \xi = \sum_{i=1}^n \xi^i (d\phi|_p)^{-1}(e_i),$$

wobei

$$(\xi^1, \dots, \xi^n)^\top = d\phi|_p(\xi).$$

Koordinatenwechsel:

Wie ändern sich die Koeffizienten $\xi^1, \dots, \xi^n$ eines Tangentialvektors, wenn wir die Karte (U, ϕ) durch eine andere Karte (V, ψ) ersetzen?

Sei $\xi \in T_p M$, und seien (U, ϕ) und (V, ψ) Karten, die beide p enthalten. Wir drücken ξ bezüglich beider Karten aus:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Nun wollen wir die Koeffizienten ξ^i durch die η^j ausdrücken und umgekehrt. Mit der Kettenregel, Prop. 4.12, berechnen wir

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = d\phi|_p(\xi) = (d\phi|_p) \left((d\psi|_p)^{-1} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \right) = D(\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

Analog gilt

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \cdot \xi^i \quad (1.6)$$

Betrachten wir den Spezialfall

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

das heißt,

$$(\xi^1, \dots, \xi^n)^\top = e_i.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^k} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \quad (1.7)$$

Wenn wir die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, was bedeutet, dass über einen Index, der in einem Ausdruck zweimal vorkommt – einmal als oberer und einmal als unterer Index – summiert wird, so kann die obige Gleichung geschrieben werden als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

oder noch kürzer als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

5.1 Differential einer Abbildung in Koordinaten

Wir erinnern daran, dass wir das Differential einer Abbildung f sowohl mittels des Begriffs der Tangentialvektoren über Kurven als auch mittels Derivationen definiert haben. Wir möchten nun einige explizite Berechnungen durchführen und sehen, wie der Ausdruck df für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ in Koordinaten aussieht. Versuchen wir, dies im Spezialfall $M = \mathbb{R}^n$ und $N = \mathbb{R}^m$ zu verstehen. Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Für jedes $p \in U$ erwarten wir, dass df eine $m \times n$ -Matrix ist. Wir bestimmen die Matrix explizit bezüglich der Standardkoordinatenbasen. Mit $(x^1, \dots, x^n)$ als Bezeichnung der Koordinaten im Definitionsbereich und $(y^1, \dots, y^m)$ als Bezeichnung derjenigen im Wertebereich verwenden wir die Kettenregel, um die Wirkung von df_p auf einen typischen Basisvektor wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) h &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (h \circ f) \\ &= \frac{\partial h}{\partial y^j} (f(p)) \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (p) \\ &= \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} \right) h. \end{aligned}$$

Somit ist

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}. \quad (5.1)$$

Dies besagt, dass die Matrix der linearen Abbildung df_p bezüglich der Koordinatenbasen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

ist, was genau die Jacobi-Matrix von f an der Stelle p ist. Daher entspricht in diesem Fall

$$df_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$$

der totalen Ableitung

$$Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Betrachten wir nun den allgemeineren Fall einer glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Indem wir glatte Koordinatenkarten (U, φ) für M , die p enthalten, und (V, ψ) für N , die $F(p)$ enthalten, wählen, erhalten wir die Koordinatendarstellung

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V).$$

Sei $\hat{p} = \varphi(p)$ die Koordinatendarstellung von p . Nach der obigen Berechnung wird $d\hat{F}_{\hat{p}}$ bezüglich der Standardkoordinatenbasen durch die Jacobi-Matrix von $\hat{F}$ an der Stelle $\hat{p}$ dargestellt. Unter Verwendung der Tatsache, dass $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$, berechnen wir

$$\begin{aligned} dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= dF_p \left(d(\varphi^{-1})_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\hat{p}} \right) \right) = d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})} \left(d\hat{F}_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\hat{p}} \right) \right). \\ dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})} \left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\hat{F}(\hat{p})} \right) \\ &= \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Somit wird dF_p in Koordinatenbasen durch die Jacobi-Matrix der (Koordinatendarstellung von) F dargestellt. Manchmal wird das Differential einer Abbildung auch der **Pushforward von F** genannt und mit F_* bezeichnet.

6. Vektorfelder

Als Nächstes wollen wir Vektorfelder einführen. Vektorfelder sind Abbildungen, die jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor im entsprechenden Tangentialraum zuordnen. Wir haben Folgendes:

Definition 6.1. Eine Abbildung $\xi : M \rightarrow TM$ heißt **Vektorfeld** auf M , falls für jedes $p \in M$ gilt

$$\pi(\xi(p)) = p. \tag{6.1}$$

Wir können die Koordinatendarstellung einer Karte verwenden, um die lokale Koordinatenbeschreibung eines beliebigen Vektorfeldes anzugeben. Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte von M . Ein Vektorfeld ξ auf U ist durch die Funktionen charakterisiert, welche die Koeffizienten des Tangentialvektors $\xi(p)$, $p \in U$, sind. Genauer gesagt, gibt es

$$\xi^1, \dots, \xi^n : U \rightarrow \mathbb{R},$$

für die

$$\xi(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Für die Karte ϕ von M betrachten wir die entsprechende Karte Φ_ϕ auf TM . Mit der bisherigen Notation sehen wir, dass ξ der Abbildung

$$v \mapsto (v, \xi^1(v), \dots, \xi^n(v)), \quad v \in V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

entspricht. Somit ist ξ genau dann C^k auf U , wenn die Koeffizientenfunktionen $\xi^1, \dots, \xi^n$ auf V C^k sind.

7. Untermannigfaltigkeiten

Wie bei jeder mathematischen Struktur ist es, sobald wir die Theorie der Mannigfaltigkeiten gesehen und verstanden haben, sinnvoll zu fragen, ob auch Teilmengen von Mannigfaltigkeiten eine glatte Struktur tragen. Wir werden sehen, dass die Begriffe *Immersion*, *Submersion* und *Einbettung* die Schlüsseleigenschaften sind, die es uns ermöglichen, spezielle Teilmengen einer Mannigfaltigkeit zu untersuchen, welche ihrerseits Mannigfaltigkeiten sind.

7.1 Submersionen, Immersionen und Einbettungen

Definition 7.1. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für $p \in M$ definieren wir den **Rang von F an der Stelle p** als den Rang der linearen Abbildung

$$dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N.$$

Mit anderen Worten, er ist der Rang der Jacobi-Matrix von F in einer beliebigen glatten Karte, beziehungsweise die Dimension von $\text{Im } dF_p \subseteq T_{F(p)} N$.

Hat F an jedem Punkt denselben Rang r , so sagen wir, dass F **konstanten Rang** hat, und schreiben $\text{rank } F = r$.

Aus dem Rangsatz wissen wir, dass der Rang von $F \leq \min\{\dim M, \dim N\}$ ist. Ist der Rang von dF_p gleich dieser oberen Schranke, so sagen wir, dass F **an der Stelle p vollen Rang hat**, und falls F überall vollen Rang hat, so sagen wir, dass F **vollen Rang hat**.

Definition 7.2. Eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ heißt **glatte Submersion**, falls ihr Differential an jedem Punkt surjektiv ist (oder äquivalent, falls $\text{rank } F = \dim N$).

Sie heißt **glatte Immersion**, falls ihr Differential an jedem Punkt injektiv ist (äquivalent, $\text{rank } F = \dim M$).

Vorschlag 7.3. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$. Ist dF_p surjektiv, so besitzt p eine Umgebung U , sodass $F|_U$ eine Submersion ist. Ist dF_p injektiv, so besitzt p eine Umgebung U , sodass $F|_U$ eine Immersion ist.

Proof. Wählen wir beliebige glatte Koordinaten für M in der Nähe von p und für N in der Nähe von $F(p)$, so bedeutet jede der beiden Voraussetzungen, dass die Jacobi-Matrix von F in Koordinaten an der Stelle p vollen Rang hat. Das Resultat folgt nun aus der Tatsache, dass die Menge der $m \times n$ -Matrizen vollen Ranges eine offene Teilmenge von $M(m \times n, \mathbb{R})$ ist¹, sodass aufgrund der Stetigkeit die Jacobi-Matrix von F in einer Umgebung von p vollen Rang hat. $\square$

Beispiel 7.4 (Submersionen und Immersionen).

- (a) Seien $M_1, \dots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist jede der Projektionsabbildungen $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ eine glatte Submersion. Insbesondere ist die Projektion $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf die ersten n Koordinaten eine glatte Submersion.
- (b) Ist $\gamma: J \rightarrow M$ eine glatte Kurve in einer glatten Mannigfaltigkeit M mit oder ohne Rand, so ist γ genau dann eine glatte Immersion, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt.
- (c) **Übung:** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und werde ihr Tangentialbündel mit TM bezeichnet. Beweisen Sie, dass die Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ eine glatte Submersion ist.
- (d) Die glatte Abbildung $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(u, v) = ((2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \sin 2\pi u)$$

ist eine glatte Immersion von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, deren Bild die donutförmige Fläche ist, die durch Rotation des Kreises $(y-2)^2 + z^2 = 1$ in der (y, z) -Ebene um die z -Achse entsteht.

¹Sei f die Funktion, die $A \in M(m \times n)$ auf $f(A) = \sum_B |\det(B)|$ abbildet, wobei die Summe über alle $m \times m$ -Untermatrizen von A läuft (unter der Annahme $m < n$). Offensichtlich ist f stetig, sodass $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ eine offene Teilmenge von $M(m \times n)$ ist.

Aufgabe 7.5. Zeigen Sie, dass eine Verkettung glatter Submersionen eine glatte Submersion ist, und dass eine Verkettung glatter Immersionen eine glatte Immersion ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um zu zeigen, dass eine Verkettung von Abbildungen konstanten Ranges nicht notwendigerweise konstanten Rang haben muss.

Wir haben bereits die Definition eines glatten lokalen Diffeomorphismus gesehen. Außerdem haben wir gesehen, dass, wenn $f: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, die lineare Abbildung $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus ist. Die Umkehrung dieser Aussage ist ebenfalls wahr und ist als der **Satz über die inverse Funktion** bekannt.

Satz 7.6 (Satz über die inverse Funktion für Mannigfaltigkeiten). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $p \in M$ ein Punkt, sodass df_p ein Isomorphismus ist, dann gibt es Umgebungen U_0 von p und V_0 von $f(p)$, sodass $f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus ist.

Proof. Die Tatsache, dass df_p bijektiv ist, impliziert, dass M und N dieselbe Dimension haben, sagen wir n . Wähle glatte Karten (U, φ) mit Zentrum in p und (V, ψ) mit Zentrum in $f(p)$, wobei $f(U) \subseteq V$ gilt. Dann ist $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine glatte Abbildung von der offenen Teilmenge $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\hat{V} = \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $\hat{f}(p) = 0$. Da φ und ψ Diffeomorphismen sind, ist das Differential

$$d\hat{f}_0 = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d(\varphi^{-1})_0$$

nichtsingulär. Der Satz über die inverse Funktion für euklidische Räume impliziert, dass es zusammenhängende offene Teilmengen $\hat{U}_0 \subseteq \hat{U}$ und $\hat{V}_0 \subseteq \hat{V}$ gibt, die 0 enthalten, sodass $\hat{f}$ sich zu einem Diffeomorphismus von $\hat{U}_0$ nach $\hat{V}_0$ einschränkt. Dann sind $U_0 = \varphi^{-1}(\hat{U}_0)$ und $V_0 = \psi^{-1}(\hat{V}_0)$ zusammenhängende Umgebungen von p beziehungsweise $f(p)$, und durch Komposition folgt, dass $f|_{U_0}$ ein Diffeomorphismus von U_0 nach V_0 ist. $\square$

Das nächste Resultat zeigt den Zusammenhang zwischen Immersionen, Submersionen und lokalen Diffeomorphismen.

Vorschlag 7.7. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

1. f ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn f sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion ist.
2. Falls $\dim M = \dim N$ gilt und f entweder eine glatte Immersion oder eine glatte Submersion ist, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus.

Proof. Angenommen zunächst, dass f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Für ein gegebenes $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p , sodass f ein Diffeomorphismus von U auf $f(U)$ ist und

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

ein Isomorphismus ist. Also gilt

$$\text{rank } f = \dim M = \dim N,$$

und somit ist f sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion. Umgekehrt gilt: Ist f sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion, dann ist df_p für jedes $p \in M$ ein Isomorphismus, und der Satz über die inverse Funktion, Theorem 7.6, zeigt, dass p eine Umgebung besitzt, auf der sich f zu einem Diffeomorphismus auf sein Bild einschränkt. Damit ist 1 bewiesen.

Um 2 zu beweisen, beachte, dass, wenn M und N dieselbe Dimension haben, entweder die Injektivität oder die Surjektivität von df_p bereits die Bijektivität impliziert. Also ist f genau dann eine glatte Submersion, wenn f eine glatte Immersion ist, und somit folgt 2 aus 1. $\square$

7.2 Der Rangsatz

Wir betrachten Beispiele einer Submersion und einer Immersion.

Beispiel 7.8. Kanonische Projektion $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m > n$

$$\pi(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

ist eine Submersion. Das Differential an jedem Punkt p ist die lineare Abbildung

$$d\pi_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

dargestellt durch die $n \times m$ -Matrix

$$d\pi_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat überall Rang n , also gilt

$$d\pi_p \text{ ist surjektiv} \implies \pi \text{ ist eine Submersion.}$$

Beachte außerdem, dass jede Faser

$$\pi^{-1}(c) \cong \mathbb{R}^{m-n}$$

ein affiner Unterraum ist.

Beispiel 7.9. Die kanonische Inklusion $\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m < n$

$$\iota(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

ist eine Immersion. Das Differential an jedem Punkt p ist

$$d\iota_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Dies ist eine $n \times m$ -Matrix von Rang m überall, also gilt

$$d\iota_p \text{ ist injektiv.}$$

Die wichtigste Tatsache über Abbildungen konstanten Ranges ist die folgende Konsequenz des Satzes über die inverse Funktion. Sie besagt, dass eine glatte Abbildung konstanten Ranges lokal durch einen Koordinatenwechsel in eine besonders einfache kanonische Form gebracht werden kann. In diesem Sinne sind die oben angegebenen Beispiele von Submersionen und Immersionen die Modellbeispiele.

Wir erinnern zunächst an das folgende Resultat über die kanonische Form surjektiver linearer Abbildungen.

Satz 7.10 (Kanonische Form einer linearen Abbildung). *Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume, und sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung vom Rang r . Dann gibt es Basen von V und W , bezüglich derer T die folgende Matrixdarstellung besitzt:*

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei I_r die $r \times r$ -Einheitsmatrix ist.

Satz 7.11 (Rangsatz). *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m beziehungsweise n , und sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung konstanten Ranges r . Für jedes $p \in M$ gibt es glatte Karten $(U, \varphi) \ni p$ für M und $(V, \psi) \ni F(p)$ für N , sodass $F(U) \subseteq V$ gilt und F in diesen Karten eine Koordinatendarstellung der Form*

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \quad (7.1)$$

besitzt. Ist F eine glatte Submersion, dann wird die Darstellung zu

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n), \quad (7.2)$$

und ist F eine glatte Immersion, dann lautet sie

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0). \quad (7.3)$$

Proof. Da der Satz lokal ist, können wir nach Wahl glatter Koordinaten M und N durch offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ersetzen. Da $DF(p)$ Rang r hat, besitzt seine Matrixdarstellung eine $r \times r$ -Untermatrix mit nichtverschwindender Determinante. Durch Umordnung der Koordinaten nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass dies die linke obere Untermatrix

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right), \quad i, j = 1, \dots, r,$$

ist. Wir schreiben die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ als

$$(x, y) = (x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^{m-r})$$

in $\mathbb{R}^m$ und

$$(v, w) = (v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^{n-r})$$

in $\mathbb{R}^n$. Durch anfängliche Translationen der Koordinaten können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$p = (0, 0) \quad \text{und} \quad F(p) = (0, 0)$$

gilt.

Schreiben wir

$$F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$$

für glatte Abbildungen

$$Q: U \rightarrow \mathbb{R}^r \quad \text{und} \quad R: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-r},$$

dann besagt unsere Voraussetzung, dass

$$\left(\frac{\partial Q^i}{\partial x^j} \right)$$

in $(0, 0)$ nichtsingulär ist.

Definiere $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$\varphi(x, y) = (Q(x, y), y).$$

Ihr totales Differential in $(0, 0)$ ist

$$D\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0, 0) & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0, 0) \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix},$$

wobei δ_j^i das **Kronecker-Delta** ist, definiert durch

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Die Matrix $D\varphi(0, 0)$ ist nichtsingulär, da der Block

$$\frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0, 0)$$

in $(0, 0)$ nichtsingulär ist und der zweite Diagonalblock gerade die Einheitsmatrix ist. Daher gibt es nach dem Satz über die inverse Funktion, Theorem 7.6, zusammenhängende Umgebungen U_0 von $(0, 0)$ und $\tilde{U}_0$ von

$$\varphi(0, 0) = (0, 0),$$

sodass

$$\varphi: U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$$

ein Diffeomorphismus ist. Durch eventuelles Verkleinern von U_0 und $\tilde{U}_0$ können wir annehmen, dass $\tilde{U}_0$ ein offener Würfel ist.

Schreiben wir die inverse Abbildung als

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

für glatte Funktionen

$$A: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^r \quad \text{und} \quad B: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-r},$$

dann berechnen wir

$$(x, y) = \varphi(A(x, y), B(x, y)) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y)). \quad (7.4)$$

Durch Vergleich der y -Komponenten erhält man

$$B(x, y) = y.$$

Daher hat φ^{-1} die Form

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), y).$$

Andererseits impliziert

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id},$$

dass

$$Q(A(x, y), y) = x.$$

Daher hat $F \circ \varphi^{-1}$ die Form

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, \tilde{R}(x, y)),$$

wobei

$$\tilde{R}: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$$

definiert ist durch

$$\tilde{R}(x, y) = R(A(x, y), y).$$

Die Jacobi-Matrix dieser zusammengesetzten Abbildung an einem beliebigen Punkt $(x, y) \in \tilde{U}_0$ ist

$$D(F \circ \varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial x^j}(x, y) & \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Da die Komposition mit einem Diffeomorphismus den Rang einer Abbildung nicht ändert, hat diese Matrix überall in $\tilde{U}_0$ Rang r , weil F nach Voraussetzung Rang r hat und φ^{-1} ein Diffeomorphismus ist. Die ersten r Spalten sind offensichtlich linear unabhängig. Also kann der Rang nur dann r sein, wenn die Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}$$

auf $\tilde{U}_0$ identisch verschwinden. Dies impliziert, dass $\tilde{R}$ tatsächlich unabhängig von

$$(y^1, \dots, y^{m-r})$$

ist. Setzen wir also

$$S(x) = \tilde{R}(x, 0),$$

dann erhalten wir

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, S(x)). \quad (7.5)$$

Wir schließen den Beweis ab, indem wir eine geeignete glatte Karte in einer Umgebung von $(0, 0) \in V$ definieren. Sei

$$V_0 \subseteq V$$

die offene Teilmenge

$$V_0 = \{(v, w) \in V : (v, 0) \in \tilde{U}_0\}.$$

Dann ist V_0 eine Umgebung von $(0, 0)$. Da $\tilde{U}_0$ ein Würfel ist und $F \circ \varphi^{-1}$ die Form (7.5) hat, folgt

$$F \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}_0) \subseteq V_0,$$

und somit

$$F(U_0) \subseteq V_0.$$

Definiere

$$\psi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$\psi(v, w) = (v, w - S(v)).$$

Dies ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild, denn seine Umkehrabbildung ist explizit gegeben durch

$$\psi^{-1}(s, t) = (s, t + S(s)).$$

Also ist (V_0, ψ) eine glatte Karte. Aus (7.5) folgt

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = \psi(x, S(x)) = (x, S(x) - S(x)) = (x, 0),$$

was zu zeigen war. □

Das nächste Korollar kann als eine invariant formulierte Version des Rangsatzes betrachtet werden. Es besagt, dass Abbildungen konstanten Ranges genau diejenigen sind, deren lokales Verhalten dem Verhalten ihrer Differentiale entspricht.

Folge 7.12. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, und sei M zusammenhängend. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Für jedes $p \in M$ gibt es glatte Karten, die p beziehungsweise $F(p)$ enthalten, in denen die Koordinatendarstellung von F linear ist.
- (b) F hat konstanten Rang.

Proof. Angenommen zunächst, dass F in einer Umgebung jedes Punktes eine lineare Koordinatendarstellung besitzt. Da jede lineare Abbildung konstanten Rang hat, folgt, dass der Rang von F in einer Umgebung jedes Punktes konstant ist. Aufgrund der Zusammenhängendheit ist er daher auf ganz M konstant. Umgekehrt zeigt der Rangsatz, falls F konstanten Rang hat, dass F in einer Umgebung jedes Punktes die lineare Koordinatendarstellung (7.1) besitzt. □

Wir verwenden nun den Rangsatz, der eine rein lokale Aussage ist, um etwas über die globale Natur glatter Abbildungen aufgrund ihres Ranges auszusagen. Zuvor erinnern wir an die folgenden topologischen Begriffe.

Definition 7.13. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **nirgend dicht**, wenn ihr Abschluss leeres Inneres hat:

$$\text{int}(\overline{A}) = \emptyset.$$

- (b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **mager** (oder **von erster Kategorie**), wenn sie als abzählbare Vereinigung nirgend dichter Mengen geschrieben werden kann:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (c) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **komager** (oder **residuell**, oder **von zweiter Kategorie**), wenn ihr Komplement $X \setminus A$ mager ist.

Satz 7.14 (Satz von Baire). Die folgenden zwei Klassen topologischer Räume sind **Baire-Räume**, das heißt, jeder abzählbare Schnitt offener dichter Teilmengen ist dicht:

- (i) Jeder **vollständige metrische Raum** (X, d) ist ein Baire-Raum.
- (ii) Jeder **lokalkompakte Hausdorff-Raum** X ist ein Baire-Raum.

Eine andere Möglichkeit, dies zu formulieren, ist die folgende. Sei X entweder ein vollständiger metrischer Raum oder ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann gelten die folgenden äquivalenten Aussagen:

- (a) (**Offene dichte Mengen**) Ist $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ eine abzählbare Familie offener dichter Teilmengen von X , dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^\infty U_n \neq \emptyset.$$

Tatsächlich ist

$$\bigcap_{n=1}^\infty U_n$$

dicht in X .

- (b) (**Nirgends dichte Mengen**) Ist $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ eine abzählbare Familie nirgends dichter Teilmengen von X , dann gilt

$$\text{int}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \emptyset.$$

Das heißt, X kann nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen geschrieben werden.

- (c) (**Magere Mengen**) Keine nichtleere offene Teilmenge von X ist mager. Äquivalent dazu ist X selbst nicht mager:

$$X \neq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{wenn jedes } A_n \text{ nirgends dicht in } X \text{ ist.}$$

- (d) (**Residuelle Mengen**) Jede komagere, also residuelle, Teilmenge von X ist dicht in X .

Wir formulieren und beweisen nun den globalen Rangsatz.

Satz 7.15 (Globaler Rangsatz). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung konstanten Ranges.

- (a) Ist F surjektiv, dann ist F eine glatte Submersion.
- (b) Ist F injektiv, dann ist F eine glatte Immersion.
- (c) Ist F bijektiv, dann ist F ein Diffeomorphismus.

Proof. Seien

$$m = \dim M, \quad n = \dim N,$$

und angenommen, F habe konstanten Rang r . Um (a) zu beweisen, nehmen wir an, dass F keine glatte Submersion ist. Das bedeutet

$$r < n.$$

Nach dem Rangsatz, Theorem 7.11, gibt es für jedes $p \in M$ glatte Karten (U, φ) für M mit Zentrum in p und (V, ψ) für N mit Zentrum in $F(p)$, sodass

$$F(U) \subseteq V$$

gilt und die Koordinatendarstellung von F durch (7.1) gegeben ist.

Durch eventuelles Verkleinern von U können wir annehmen, dass U ein regulärer Koordinatenball ist und

$$F(\bar{U}) \subseteq V$$

gilt, wobei $\bar{U}$ der abgeschlossene Koordinatenball und der Abschluss der offenen Menge U ist. Dies impliziert, dass $F(\bar{U})$ eine kompakte Teilmenge der Menge

$$\{y \in V : y^{r+1} = \dots = y^n = 0\}$$

ist. Daher ist $F(\bar{U})$ abgeschlossen in N und enthält keine offene Teilmenge von N ; folglich ist $F(\bar{U})$ nirgends dicht in N . Da jede offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, können wir abzählbar viele solcher Karten

$$\{(U_i, \varphi_i)\}$$

wählen, die M überdecken, mit entsprechenden Karten

$$\{(V_i, \psi_i)\}$$

die $F(M)$ überdecken. Da $F(M)$ gleich der abzählbaren Vereinigung der nirgends dichten Mengen

$$F(\bar{U}_i)$$

ist, folgt aus dem Satz von Baire, Theorem 7.14, dass $F(M)$ leeres Inneres in N hat. Das bedeutet, dass F nicht surjektiv sein kann.

Um (b) zu beweisen, nehmen wir an, dass F keine glatte Immersion ist, also

$$r < m.$$

Nach dem Rangsatz können wir für jedes $p \in M$ Karten auf Umgebungen von p und $F(p)$ wählen, in denen F die Koordinatendarstellung (7.1) hat. Daraus folgt, dass

$$F(0, \dots, 0, \varepsilon) = F(0, \dots, 0, 0)$$

für jedes hinreichend kleine ε gilt. Also ist F nicht injektiv.

Schließlich folgt (c) aus (a) und (b), denn eine bijektive glatte Abbildung konstanten Ranges ist nach Teil (a) eine glatte Submersion und nach Teil (b) eine glatte Immersion. Daher impliziert Proposition 7.7, dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist, und da F bijektiv ist, ist F ein Diffeomorphismus. $\square$

7.3 Einbettungen

Eine spezielle Art von Immersion ist besonders wichtig.

Definition 7.16. Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten, so heißt eine **glatte Einbettung von M in N** eine glatte Immersion

$$F : M \rightarrow N,$$

die außerdem eine topologische Einbettung ist, das heißt ein Homöomorphismus auf ihr Bild

$$F(M) \subseteq N$$

bezüglich der Teilraumtopologie.

Beispiel 7.17 (Glatte Einbettungen). 1. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und ist $U \subseteq M$ eine offene Untermannigfaltigkeit, dann ist die Inklusionsabbildung

$$U \hookrightarrow M$$

eine glatte Einbettung.

2. Sind $M_1, \dots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten und sind $p_i \in M_i$ beliebig gewählte Punkte, dann ist jede der Abbildungen

$$\iota_j : M_j \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$$

gegeben durch

$$\iota_j(q) = (p_1, \dots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \dots, p_k)$$

eine glatte Einbettung. Insbesondere ist die Inklusionsabbildung

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

gegeben durch

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

eine glatte Einbettung.

Betrachten wir einige *Nicht-Beispiele* glatter Einbettungen. Im Folgenden geben wir einige Beispiele, in denen eines der Kriterien für eine glatte Einbettung fehlschlägt.

Beispiel 7.18 (Eine glatte topologische Einbettung). Die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\gamma(t) = (t^3, 0)$, ist eine glatte Abbildung und eine topologische Einbettung, aber sie ist keine glatte Einbettung. Die Abbildung γ ist glatt und eine topologische Einbettung, denn

$$\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

was die x -Achse in $\mathbb{R}^2$ ist. Die Umkehrabbildung vom Bild $\gamma(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\gamma^{-1}(x, 0) = \sqrt[3]{x}.$$

Da $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ stetig ist, ist γ^{-1} stetig. Daher ist γ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ auf sein Bild, also eine topologische Einbettung.

Aber γ ist keine glatte Einbettung, denn

$$\gamma'(t) = (3t^2, 0).$$

Insbesondere gilt bei $t = 0$

$$\gamma'(0) = (0, 0).$$

Somit ist das Differential

$$d\gamma_0 : T_0\mathbb{R} \rightarrow T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$$

die Nullabbildung, also nicht injektiv.

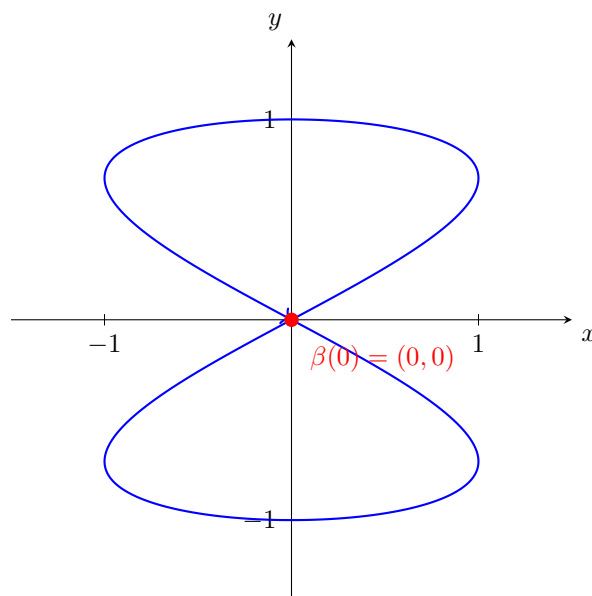
Beispiel 7.19 (Die Acht-Kurve). Betrachte die Kurve $\beta : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t).$$

Ihr Bild sieht wie eine Acht in der Ebene aus, siehe die Abbildung unten. Wir zeigen, dass β keine glatte Einbettung ist. Es gilt

$$\beta'(t) = (2 \cos 2t, \cos t),$$

und daher gilt $\beta'(t) \neq 0$ für alle $t \in (-\pi, \pi)$, denn bei $t = \frac{\pi}{2}$ gilt $\beta'(\frac{\pi}{2}) = (2 \cos \pi, \cos \frac{\pi}{2}) = (-2, 0) \neq 0$. Und bei $t = 0$ gilt $\beta'(0) = (2, 1) \neq 0$.



Wir überprüfen, dass β *kein* Homöomorphismus auf sein Bild ist. Die Umkehrabbildung $\beta^{-1} : \beta((-\pi, \pi)) \rightarrow (-\pi, \pi)$ ist **nicht stetig**. Beachte zunächst, dass

$$\beta(0) = (\sin 0, \sin 0) = (0, 0).$$

Definiere nun die Folge

$$t_n = \pi - \frac{1}{n} \in (-\pi, \pi), \quad n \geq 2.$$

Dann gilt $t_n \rightarrow \pi$ für $n \rightarrow \infty$, und

$$\begin{aligned} \sin 2t_n &= \sin\left(2\pi - \frac{2}{n}\right) = -\sin \frac{2}{n} \rightarrow 0, \\ \sin t_n &= \sin\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\beta(t_n) = \left(-\sin \frac{2}{n}, \sin \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0, 0) = \beta(0) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Also gilt $\beta(t_n) \rightarrow \beta(0)$ in der Teilraumtopologie auf $\beta((-\pi, \pi))$.

Wäre β^{-1} stetig, so müsste gelten

$$\beta^{-1}(\beta(t_n)) = t_n \longrightarrow \beta^{-1}(0, 0) = 0.$$

Aber $t_n \rightarrow \pi \neq 0$. Daher ist β^{-1} bei $(0, 0)$ nicht stetig, also ist β kein Homöomorphismus auf sein Bild.

Beispiel 7.20. Sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der 2-Torus, und sei α eine beliebige irrationale Zahl. Die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, gegeben durch

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}),$$

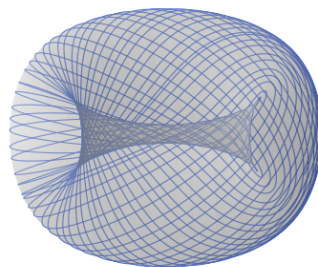
ist eine glatte Immersion, da $\gamma'(t)$ niemals verschwindet. Sie ist auch injektiv, denn $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ impliziert, dass sowohl $t_1 - t_2$ als auch $\alpha t_1 - \alpha t_2$ ganze Zahlen sind, was unmöglich ist, außer wenn $t_1 = t_2$ gilt. Allerdings ist γ *kein* Homöomorphismus auf sein Bild. Um dies zu sehen, sei $\varepsilon > 0$. Dann können wir $n, m \in \mathbb{Z}$ finden mit $|\alpha n - m| < \varepsilon$. Somit gilt

$$\begin{aligned} |\gamma(n) - \gamma(0)| &= |(e^{2\pi i n}, e^{2\pi i \alpha n}) - (1, 1)| \\ &= |(1, e^{2\pi i \alpha n}) - (1, 1)| \\ &\leq |e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i m}| \\ &\leq |2\pi(\alpha n - m)| \\ &\leq 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Daher gilt $\gamma(0) \in \overline{\gamma(\mathbb{Z})}$, aber $\mathbb{Z}$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

Natürlich ist γ für $\alpha \in \mathbb{Q}$ nicht einmal injektiv.

Dense curve on $\mathbb{T}^2$: $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \sqrt{2} t})$



7.4 Untermannigfaltigkeiten

Wie der Name andeutet, sollten Untermannigfaltigkeiten Teile einer Mannigfaltigkeit sein, die selbst Mannigfaltigkeiten sind. Dies ist der Begriff, den wir in diesem Abschnitt präzisieren wollen. Wir werden zwei Möglichkeiten angeben, eine Untermannigfaltigkeit zu definieren. Erinnern wir uns zunächst aus der linearen Algebra daran, dass ein linearer Unterraum eines Vektorraums, zum Beispiel

$$\mathbb{R}^\ell \times \{0\} = \{(x^1, \dots, x^\ell, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid (x^1, \dots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (7.6)$$

definitiv selbst eine Mannigfaltigkeit ist und tatsächlich das typische Beispiel einer Untermannigfaltigkeit darstellt. In der Tat sieht jeder ℓ -dimensionale Unterraum eines n -dimensionalen Vektorraums nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation wie (7.6) aus. Der Begriff der glatten Untermannigfaltigkeit verallgemeinert diese Idee. Wir beginnen zunächst mit der folgenden Definition.

Definition 7.21 (Schnittkarten). Eine Karte $(\mathcal{U}, \phi)$ auf einer n -Mannigfaltigkeit M heißt eine **ℓ -dimensionale Schnittkarte** für eine Teilmenge $L \subset M$, falls

$$L \cap \mathcal{U} = x^{-1}(\mathbb{R}^\ell \times \{0\}),$$

d.h. die Punkte in $\mathcal{U}$ gehören genau dann zu L , wenn ihre Koordinaten $x^{\ell+1}, \dots, x^n$ verschwinden.

Definition 7.22. Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $L \subset M$ heißt eine **ℓ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit** von M , falls M eine Sammlung glatter Schnittkarten für L besitzt, deren Definitionsbereiche jeden Punkt von L überdecken.

Beispiel 7.23. Wenn wir Polarkoordinaten zur Beschreibung der glatten Struktur auf $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit den beiden Karten (U, θ) und (V, ϕ) verwenden, wobei $\theta(U) = (0, 2\pi)$ und $\phi(V) = (-\pi, \pi)$ gilt, dann sind diese beiden Koordinaten auf offenen Teilmengen von S^1 definiert, besitzen aber auch natürliche Erweiterungen auf offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, nämlich

$$\mathcal{U}' := \{tv \in \mathbb{R}^2 \mid v \in U, t > 0\}, \quad \mathcal{V}' := \{tv \in \mathbb{R}^2 \mid v \in V, t > 0\}.$$

Erinnern wir uns daran, dass eine **1-dimensionale Schnittkarte** für $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine Karte $(\mathcal{U}', (x^1, x^2))$ auf $\mathbb{R}^2$ ist, sodass ein Punkt von $\mathcal{U}'$ genau dann auf S^1 liegt, wenn $x^2 = 0$.

Definiere die radialen und Winkelkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie üblich und setze

$$\rho := r - 1 \quad \text{sodass} \quad S^1 = \{r = 1\} = \{\rho = 0\}.$$

Definiere

$$\mathcal{U}' = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \cup \{(x, 0) \mid x > 0\}).$$

Dies ist $\mathbb{R}^2$ ohne den Ursprung und ohne die positive x -Achse. Die Koordinatenabbildung ist

$$(\theta, \rho) : \mathcal{U}' \rightarrow (0, 2\pi) \times (-1, \infty),$$

wobei $\theta \in (0, 2\pi)$ der Polarwinkel ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Dann gilt

$$S^1 \cap \mathcal{U}' = (\theta, \rho)^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}),$$

da $\rho = 0 \iff r = 1$. Ebenso gilt

$$\mathcal{V}' = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \cup \{(x, 0) \mid x < 0\}).$$

Dies ist $\mathbb{R}^2$ ohne den Ursprung und ohne die **negative** x -Achse. Die Koordinatenabbildung ist

$$(\phi, \rho) : \mathcal{V}' \rightarrow (-\pi, \pi) \times (-1, \infty),$$

wobei $\phi \in (-\pi, \pi)$ der Polarwinkel ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Dann gilt

$$S^1 \cap \mathcal{V}' = (\phi, \rho)^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}).$$

Also gilt $S^1 \subset \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}'$, und die beiden Schnitkarten überdecken jeden Punkt von S^1 . Dies bestätigt, dass S^1 eine **glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^2$ ist.

Beweisen wir nun, dass eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit auch selbst eine Mannigfaltigkeit ist.

Vorschlag 7.24. Ist L eine ℓ -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit einer n -dimensionalen C^k -Mannigfaltigkeit M , dann erbt L auf natürliche Weise von M die Struktur einer ℓ -dimensionalen C^k -Mannigfaltigkeit, sodass die Inklusionsabbildung $i : L \hookrightarrow M$ von der Klasse C^k ist. Außerdem ist für jedes $p \in L$ der Tangentialraum $T_p L$ auf natürliche Weise ein ℓ -dimensionaler linearer Unterraum von $T_p M$.

Proof. Wir ordnen jeder Schnitkarte $(\mathcal{U}, x)$ für $L \subset M$ eine Karte der Form $(\mathcal{U} \cap L, x_L)$ auf L zu, wobei wir die Koordinatenprojektion

$$\pi_\ell(x^1, \dots, x^n) := (x^1, \dots, x^\ell)$$

verwenden, um

$$x_L = \pi_\ell \circ x|_{\mathcal{U} \cap L} : \mathcal{U} \cap L \rightarrow \mathbb{R}^\ell$$

zu definieren. Da L eine Untermannigfaltigkeit ist, kann L durch Schnitkarten überdeckt werden, und daher definiert die Sammlung aller Karten dieser Form einen Atlas auf L . Wir überprüfen nun die Kompatibilitätsbedingungen. Gegeben seien zwei solche Karten $(\mathcal{U} \cap L, x_L)$ und $(\mathcal{V} \cap L, y_L)$, die von zwei C^k -kompatiblen Schnitkarten $(\mathcal{U}, x)$ und $(\mathcal{V}, y)$ stammen. Die Übergangsabbildung $y \circ x^{-1}$ erhält den Unterraum $\mathbb{R}^\ell \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, und ihre Einschränkung auf den Schnitt ihres Definitionsbereichs mit diesem Unterraum ist die Übergangsabbildung $y_L \circ x_L^{-1}$. Diese ist daher von der Klasse C^k , da $y \circ x^{-1}$ von der Klasse C^k ist. Ebenso folgen die Zweite Abzählbarkeit und die Hausdorff-Eigenschaft für L aus den entsprechenden Eigenschaften von M , und somit ist L eine C^k -Mannigfaltigkeit. Die Inklusionsabbildung $i : L \hookrightarrow M$ sieht bezüglich jeder Schnitkarte $(\mathcal{U}, x)$ und der zugehörigen Karte $(\mathcal{U} \cap L, x_L)$ auf L wie

$$(x^1, \dots, x^\ell) \mapsto (x^1, \dots, x^\ell, 0, \dots, 0)$$

aus. Dies ist offensichtlich glatt, also ist die Inklusion von der Klasse C^k .²

Für jedes $p \in L$ ist die Tangentialabbildung $di_p : T_p L \rightarrow T_p M$ einfach die kanonische Inklusion $T_p L \hookrightarrow T_p M$, die dadurch definiert ist, dass man jede Kurve in L als Kurve in M auffasst. Da ihr Bild ein linearer Unterraum ist, liefert sie einen kanonischen Isomorphismus von $T_p L$ auf einen linearen Unterraum von $T_p M$. $\square$

Somit ist eine Untermannigfaltigkeit $L \subset M$ eine Mannigfaltigkeit, und von nun an werden wir annehmen, dass L mit der in Proposition 7.24 beschriebenen differenzierbaren Struktur versehen ist.

Aufgabe 7.25. Angenommen, M und N sind beide C^k -Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ ist eine Abbildung der Klasse C^k . Beweise:

- (a) Für jede C^k -Untermannigfaltigkeit $L \subset M$ ist die Einschränkung $f|_L : L \rightarrow N$ ebenfalls eine Abbildung der Klasse C^k .
- (b) Ist $L \subset N$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit mit $f(M) \subset L$, dann ist die resultierende Abbildung $f : M \rightarrow L$ ebenfalls von der Klasse C^k .

7.5 Einbettungen und Niveaumengen

Wir versuchen nun, die Beziehung zwischen Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten zu verstehen. Dies wird uns auch ermöglichen, viele weitere Beispiele von Untermannigfaltigkeiten zu erzeugen. Das Hauptergebnis in dieser Richtung ist das folgende.

Satz 7.26. Ist $f : M \rightarrow N$ eine Einbettung, dann ist ihr Bild $f(M)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von N .

²Erinnern wir uns daran, dass es, wenn sowohl L als auch M Mannigfaltigkeiten der Klasse C^k mit $k < \infty$ sind, keinen Sinn ergibt zu sagen, dass die Inklusion $L \hookrightarrow M$ glatt ist, auch wenn sie in den speziellen lokalen Koordinaten, die wir gewählt haben, glatt aussieht. Der Punkt ist, dass man auch andere Koordinaten wählen könnte, in denen sie immer noch wie eine Abbildung der Klasse C^k aussieht, aber nicht notwendigerweise wie eine Abbildung der Klasse C^∞ .

Proof. Wir wollen Schnitkarten für $f(M) \subset N$ konstruieren. Sei $q \in f(M)$. Da f injektiv ist, gibt es einen eindeutigen Punkt $p \in M$ mit $f(p) = q$. Da f eine Immersion ist, liefert der Rangsatz 7.11 Karten $(\mathcal{U}, x)$ auf M und $(\mathcal{V}, y)$ auf N mit $x(p) = 0$ und $y(q) = 0$, sodass $y \circ f \circ x^{-1}$ die Form $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$ hat. Da die Umkehrabbildung $f(M) \rightarrow M$ ebenfalls stetig ist, dürfen wir nach eventuellem Verkleinern von $\mathcal{V} \subset N$ zu einer kleineren Umgebung von q annehmen, dass

$$f^{-1}(\mathcal{V} \cap f(M)) \subset \mathcal{U},$$

oder mit anderen Worten, dass $\mathcal{V} \cap f(M) = f(\mathcal{U})$ gilt. Dies zeigt, dass $(\mathcal{V}, y)$ eine Schnitkarte für die Teilmenge $f(M)$ ist. $\square$

Tatsächlich können wir als Korollar des vorherigen Satzes eine alternative Definition des Begriffs einer Untermannigfaltigkeit geben.

Folge 7.27. Eine Teilmenge $L \subset M$ einer glatten Mannigfaltigkeit M ist genau dann eine glatte Untermannigfaltigkeit, wenn sie eine glatte Struktur besitzt, bezüglich derer die Inklusionsabbildung $L \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung ist. $\square$

Wir betrachten nun die Beziehungen zwischen Submersionen und Untermannigfaltigkeiten. Wir treffen die folgende Definition.

Definition 7.28. Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $p \in M$ heißt ein **regulärer Punkt** von f , wenn f bei p eine Submersion ist, und andernfalls ein **kritischer Punkt**. Ein Punkt $q \in N$ heißt ein **kritischer Wert** von f , wenn $q = f(p)$ für einen kritischen Punkt p gilt; andernfalls heißt q ein **regulärer Wert** von f .

Satz 7.29. Für jede glatte Abbildung $f : M^m \rightarrow N^n$ mit regulärem Wert $q \in N$ ist $L := f^{-1}(q) \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit $\dim L = \dim M - \dim N$, und der Tangentialraum an jedem Punkt $p \in L$ ist $T_p L = \ker df_p \subset T_p M$.

Proof. Wir möchten Schnitkarten für L finden. Für jedes $p \in L = f^{-1}(q)$ ist f nach Voraussetzung eine Submersion bei p . Daher liefert Theorem 7.11 Karten x in einer Umgebung von p und y in einer Umgebung von q , sodass $x(p)$ und $y(q)$ jeweils der Ursprung in den entsprechenden euklidischen Räumen sind und $y \circ f \circ x^{-1}$ zu der Abbildung $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ wird. Die Nullmenge dieser Abbildung ist, in den x -Koordinaten betrachtet, eine Umgebung von p in $f^{-1}(q)$; somit ist x eine Schnitkarte.

Wir betrachten nun den Tangentialraum und beweisen, dass $T_p L = \ker df_p$ gilt. Beachte zunächst, dass für jede Kurve γ in L durch p die zusammengesetzte Kurve $f \circ \gamma$ eine konstante Kurve bei $q \in N$ ist. Daher gilt $df_p([\gamma]) = 0 \in T_q N$, was $T_p L \subset \ker df_p$ beweist. Da q ein regulärer Wert ist, ist $df_p : T_p M \rightarrow T_q N$ surjektiv. Daraus folgt mit dem Rangsatz beziehungsweise dem Dimensionssatz

$$\dim T_p L = \dim L = \dim M - \dim N = \dim T_p M - \dim T_q N = \dim \ker T_p f.$$

$\square$

Definition 7.30. Untermannigfaltigkeiten der Form $f^{-1}(q) \subset M$ für reguläre Werte $q \in N$ heißen **reguläre Niveaumengen** von f .

Somit zeichnet sich eine Submersion $f : M \rightarrow N$ dadurch aus, dass *alle* ihre Niveaumengen regulär und daher glatte Untermannigfaltigkeiten sind.

Tatsächlich beweist der Beweis von Theorem 7.29 auch das folgende Resultat über Abbildungen konstanten Ranges.

Satz 7.31 (Niveaumengensatz für konstanten Rang). Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, sodass f konstanten Rang r hat. Dann sind die Niveaumengen von f , d.h. $f^{-1}(q) \subset M$ für $q \in N$, glatte Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $m - r$.

Wir haben nun eine *sehr* einfache Möglichkeit zu beweisen, dass einfache Beispiele wie die Einheitssphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tatsächlich glatte Untermannigfaltigkeiten sind.

Beispiel 7.32. Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mithilfe des standardmäßigen euklidischen Skalarprodukts durch $f(x) = |x|^2 = \langle x, x \rangle$. Dies ist eine glatte Abbildung, deren Differential an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch $d_x f(v) = 2\langle x, v \rangle$ gegeben ist. Daher ist sie überall außer am Ursprung eine Submersion. Dies macht $S^n = f^{-1}(1)$ zu einer glatten Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n+1) - 1 = n$. Insbesondere erbt S^n eine natürliche glatte Struktur, bezüglich derer die Inklusion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Einbettung ist. Der Kern von $d_x f$ an einem Punkt $x \in S^n$ ist das orthogonale Komplement von x , also

$$T_x S^n = x^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Beispiel 7.33. Die glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$ hat genau einen kritischen Punkt, nämlich bei $(x, y) = (0, 0)$. Daher ist $f^{-1}(t)$ für jedes $t \neq 0$ eine glatte Untermannigfaltigkeit (eine Hyperbel), und ebenso ist $f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Die Menge $f^{-1}(0)$ ist jedoch am Ursprung keine Untermannigfaltigkeit.

8. Vektorfelder

8.1 Glatte Vektorfelder

Definition 8.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld auf M** ist eine stetige Abbildung $X : M \rightarrow TM$, üblicherweise geschrieben als $p \mapsto X_p$, mit der Eigenschaft, dass

$$\pi \circ X = \text{id}_M, \quad \pi : TM \rightarrow M \text{ die Projektionsabbildung} \quad (8.1)$$

oder äquivalent, $X_p \in T_p M$ für jedes $p \in M$.

Man kann sich ein Vektorfeld auf M auf dieselbe Weise vorstellen wie Vektorfelder im euklidischen Raum: als einen an jedem Punkt von M angehefteten Pfeil, der tangential an M gewählt ist und stetig von Punkt zu Punkt variiert.

Da wir bereits in Satz 4.8 gesehen haben, dass, wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist, das Tangentialbündel TM eine glatte Struktur von M erbt, sagen wir, dass ein Vektorfeld ein **glattes Vektorfeld** ist, falls es als Abbildung von M nach TM glatt ist.

Wie bei Funktionen ist für ein Vektorfeld X auf M der **Träger von X** definiert als der Abschluss der Menge $\{p \in M : X_p \neq 0\}$. Ein Vektorfeld heißt **kompakt getragen**, wenn sein Träger eine kompakte Menge ist.

Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Ist $X : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld und $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Koordinatenkarte für M , so können wir den Wert von X an jedem Punkt $p \in U$ in Bezug auf die Koordinatenbasisvektoren schreiben:

$$X_p = X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p. \quad (8.2)$$

Dies definiert n Funktionen $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannten **Komponentenfunktionen von X** in der gegebenen Karte. Wir können die Glattheit von Vektorfeldern in Begriffen der Glattheit der Komponentenfunktionen ausdrücken.

Vorschlag 8.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld. Ist $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Koordinatenkarte auf M , so ist die Einschränkung von X auf U genau dann glatt, wenn seine Komponentenfunktionen bezüglich dieser Karte glatt sind.

Beweis. Seien (x^i, v^i) die natürlichen Koordinaten auf $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$, die mit der Karte $(U, (x^i))$ assoziiert sind. Nach Definition der natürlichen Koordinaten ist die Koordinatendarstellung von $X : M \rightarrow TM$ auf U

$$\widehat{X}(x) = (x^1, \dots, x^n, X^1(x), \dots, X^n(x)),$$

wobei X^i die i -te Komponentenfunktion von X in x^i -Koordinaten ist. Daraus folgt unmittelbar, dass die Glattheit von X in U äquivalent zur Glattheit seiner Komponentenfunktionen ist. $\square$

Sehen wir uns einige Beispiele für glatte Vektorfelder an.

Beispiel 8.3. (Koordinaten-Vektorfelder). Ist $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Karte auf M , so bestimmt die Zuordnung

$$p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

ein Vektorfeld auf U , das **i -te Koordinaten-Vektorfeld** genannt und mit $\partial/\partial x^i$ bezeichnet wird. Es ist glatt, da seine Komponentenfunktionen konstant sind.

Beispiel 8.4. (Das Euler-Vektorfeld). Das Vektorfeld V auf $\mathbb{R}^n$, dessen Wert an $x \in \mathbb{R}^n$

$$V_x = x^1 \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x + \dots + x^n \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_x$$

ist, ist glatt, da seine Koordinatenfunktionen linear sind. Es verschwindet im Ursprung und zeigt überall sonst radial nach außen. Es heißt das **Euler-Vektorfeld**.

Ist $U \subseteq M$ offen, so erlaubt uns die Tatsache, dass $T_p U$ für jedes $p \in U$ in natürlicher Weise mit $T_p M$ identifiziert wird, TU mit der offenen Teilmenge $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ zu identifizieren. Daher kann ein Vektorfeld auf U entweder als Abbildung von U nach TU oder als Abbildung von U nach TM aufgefasst werden, je nachdem, was zweckmäßiger ist. Ist X ein Vektorfeld auf M , so ist seine Einschränkung $X|_U$ ein Vektorfeld auf U , das glatt ist, wenn X glatt ist.

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so verwenden wir

Notation: die Notation $\mathfrak{X}(M)$ oder $\Gamma(TM)$ zur Bezeichnung der Menge aller glatten Vektorfelder auf M .

Die Menge $\mathfrak{X}(M)$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum unter punktwiser Addition und Skalarmultiplikation:

$$(aX + bY)_p = aX_p + bY_p.$$

Das Nullelement dieses Vektorraums ist das Null-Vektorfeld, dessen Wert an jedem $p \in M$ gleich $0 \in T_p M$ ist. Außerdem können glatte Vektorfelder mit glatten reellwertigen Funktionen multipliziert werden: Sind $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so definieren wir $fX : M \rightarrow TM$ durch

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Die nächste Proposition zeigt, dass diese Operationen tatsächlich glatte Vektorfelder liefern.

Vorschlag 8.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

- (1) Sind X und Y glatte Vektorfelder auf M und $f, g \in C^\infty(M)$, so ist $fX + gY$ ein glattes Vektorfeld.
- (2) $\mathfrak{X}(M)$ ist ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$.

Proof. Übung. □

8.2 Lokale und globale Rahmen

Koordinaten-Vektorfelder in einer glatten Karte bieten eine bequeme Möglichkeit, Vektorfelder darzustellen, da ihre Werte an jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums bilden. Sie sind jedoch nicht die einzige Wahl.

Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Ein geordnetes k -Tupel $(X_1, \dots, X_k)$ von Vektorfeldern, das auf einer Teilmenge $A \subseteq M$ definiert ist, heißt **linear unabhängig**, wenn $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ für jedes $p \in A$ ein linear unabhängiges k -Tupel in $T_p M$ ist, und heißt **Erzeugendensystem des Tangentialbündels**, wenn das k -Tupel $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ an jedem $p \in A$ den Raum $T_p M$ aufspannt.

Definition 8.6. Ein **lokaler Rahmen** für M ist ein geordnetes n -Tupel von Vektorfeldern $(E_1, \dots, E_n)$, das auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert ist, linear unabhängig ist und das Tangentialbündel aufspannt. Mit anderen Worten, die Vektoren $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ bilden für jedes $p \in U$ eine Basis von $T_p M$.

Er heißt **globaler Rahmen**, falls $U = M$, und **glatter Rahmen**, falls jedes der Vektorfelder E_i glatt ist.

Beispiel 8.7. (Lokale und globale Rahmen).

- (a) Die Standard-Koordinaten-Vektorfelder bilden einen glatten globalen Rahmen für $\mathbb{R}^n$.
- (b) Ist $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Koordinatenkarte für eine glatte Mannigfaltigkeit M , so bilden die Koordinaten-Vektorfelder einen glatten lokalen Rahmen $(\partial/\partial x^i)$ auf U , der ein **Koordinatenrahmen** genannt wird. Jeder Punkt von M liegt im Definitionsbereich eines solchen lokalen Rahmens.
- (c) Das Vektorfeld $d/d\theta$ auf S^1 , wobei θ die Winkelkoordinate ist, ist ein glatter globaler Rahmen für den Kreis.
- (d) Das n -Tupel von Vektorfeldern $(\partial/\partial \theta^1, \dots, \partial/\partial \theta^n)$ auf dem n -Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ ist ein glatter globaler Rahmen für T^n .

Für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gibt es eine spezielle Art von Rahmen, die für geometrische Probleme oft nützlicher ist als beliebige Rahmen. Ein k -Tupel von Vektorfeldern $(E_1, \dots, E_k)$, das auf einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert ist, heißt **orthonormal**, wenn für jedes $p \in A$ die Vektoren $(E_1|_p, \dots, E_k|_p)$ orthonormal bezüglich des euklidischen Skalarprodukts sind (wobei wir $T_p \mathbb{R}^n$ in der üblichen Weise mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren). Ein (lokaler oder globaler) Rahmen, der aus orthonormalen Vektorfeldern besteht, heißt **orthonormaler Rahmen**.

8.3 Vektorfelder und Derivationen

Erinnern wir uns, dass wir einen Tangentialvektor als Derivation auffassen können. Analog definieren Vektorfelder Operatoren auf dem Raum der glatten reellwertigen Funktionen $C^\infty(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M . Sind $X \in \mathfrak{X}(M)$ und f eine glatte reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert ist, so erhalten wir eine neue Funktion $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$(Xf)(p) = X_p f,$$

wobei der Tangentialvektor X_p als Derivation auf die Funktion f wirkt. Da die Wirkung eines Tangentialvektors auf eine Funktion durch die Werte der Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung bestimmt ist, folgt, dass Xf lokal bestimmt ist. Insbesondere gilt für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$:

$$(Xf)|_V = X(f|_V). \quad (8.3)$$

Diese Konstruktion liefert ein weiteres nützliches Glattheitskriterium für Vektorfelder.

Vorschlag 8.8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) X ist glatt.
- (b) Für jedes $f \in C^\infty(M)$ ist die Funktion Xf glatt auf M .
- (c) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jedes $f \in C^\infty(U)$ ist die Funktion Xf glatt auf U .

Proof. Wir werden zeigen, dass (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Um (a) $\Rightarrow$ (b) zu beweisen, nehmen wir an, X sei glatt, und sei $f \in C^\infty(M)$. Für jedes $p \in M$ können wir glatte Koordinaten (x^i) in einer Umgebung U von p wählen. Dann können wir für $x \in U$ schreiben:

$$Xf(x) = \left(X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Da die Komponentenfunktionen X^i glatt auf U sind, folgt, dass Xf glatt auf U ist. Da dasselbe in einer Umgebung jedes Punktes gilt, ist Xf glatt auf M .

Um (b) $\Rightarrow$ (c) zu beweisen, nehmen wir an, $U \subseteq M$ sei offen und $f \in C^\infty(U)$. Für jedes $p \in U$ sei ψ eine glatte Buckelfunktion, die in einer Umgebung von p gleich 1 ist und in U getragen ist, und definiere $\tilde{f} = \psi f$, fortgesetzt durch Null auf $M \setminus \text{supp } \psi$. Dann ist $X\tilde{f}$ nach Voraussetzung glatt und gleich Xf in einer Umgebung von p . Dies zeigt, dass Xf in einer Umgebung jedes Punktes von U glatt ist.

Schließlich, um (c) $\Rightarrow$ (a) zu beweisen, nehmen wir an, Xf sei glatt, wann immer f auf einer offenen Teilmenge von M glatt ist. Sind (x^i) irgendwelche glatten lokalen Koordinaten auf $U \subseteq M$, so können wir jede Koordinate x^i als glatte Funktion auf U auffassen. Wenden wir X auf eine dieser Funktionen an, so erhalten wir

$$Xx^i = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = X^i.$$

Da Xx^i nach Voraussetzung glatt ist, folgt, dass die Komponentenfunktionen von X glatt sind, also ist X glatt. $\square$

Somit definiert ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine Abbildung von

$$C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto Xf.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear über $\mathbb{R}$. Darüber hinaus impliziert die Leibniz-Regel für Tangentialvektoren als Derivationen die Produktregel für Vektorfelder:

$$X(fg) = fXg + gXf, \quad (8.4)$$

wie man leicht durch Auswerten beider Seiten an einem beliebigen Punkt $p \in M$ überprüfen kann.

Eine Abbildung $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ heißt **Derivation** (im Unterschied zu einer *Derivation an p*), wenn sie linear über $\mathbb{R}$ ist und (8.4) für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt. Somit ist jedes Vektorfeld eine Derivation auf $C^\infty(M)$.

Die Funktion Xf wird manchmal auch mit $\mathcal{L}_X f = Xf$ bezeichnet und heißt **Lie-Ableitung von f in Richtung X** .

Die nächste Proposition zeigt, dass Derivationen von $C^\infty(M)$ mit glatten Vektorfeldern identifiziert werden können.

Lemma 8.9. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ist genau dann eine Derivation, wenn sie die Form $Df = Xf = \mathcal{L}_X f$ für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ hat.*

Proof. Wir haben oben gerade gezeigt, dass jedes glatte Vektorfeld eine Derivation induziert. Umgekehrt, sei $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ eine Derivation. Wir müssen ein Vektorfeld X angeben, so dass $Df = Xf$ für alle f . Aus der obigen Diskussion ist klar, dass, falls es ein solches Vektorfeld gibt, sein Wert an $p \in M$ die Derivation an p sein muss, deren Wirkung auf eine beliebige glatte reellwertige Funktion f gegeben ist durch

$$X_p f = Df(p)$$

Die Linearität von D garantiert, dass dieser Ausdruck linear von f abhängt, und die Tatsache, dass D eine Derivation ist, liefert die Leibniz-Regel für Tangentialvektoren. Somit ist die so definierte Abbildung $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich ein Tangentialvektor, das heißt, eine Derivation von $C^\infty(M)$ an p . Dies definiert X als Vektorfeld. Da $Xf = Df$ glatt ist, wann immer $f \in C^\infty(M)$ ist, ist dieses Vektorfeld nach Proposition 8.8 glatt. $\square$

Somit gilt:

$$\text{glatte Vektorfelder auf } M \leftrightarrow \text{Derivationen von } C^\infty(M).$$

8.4 Vektorfelder, glatte Abbildungen, Pushforwards und Pullbacks

Erinnern wir uns, dass wir, wenn $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und X ein Vektorfeld auf M ist, für jeden Punkt $p \in M$ einen Vektor $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$ erhalten, indem wir das Differential von F auf X_p anwenden. Dies wirft die Frage auf: Liefert dieser Prozess, wenn er global angewendet wird, ein Vektorfeld auf N anstelle nur von Tangentialvektoren, die vom Punkt abhängen? Die Antwort lautet **nein**, dies definiert im Allgemeinen kein Vektorfeld auf N . Zum Beispiel, falls F nicht surjektiv ist, gibt es keine Möglichkeit zu entscheiden, welcher Vektor einem Punkt $q \in N \setminus F(M)$ zugeordnet werden soll. Falls F nicht injektiv ist, dann kann es für einige Punkte von N mehrere verschiedene Vektoren geben, die durch Anwenden von dF auf X an verschiedenen Punkten von M erhalten werden.

Sei $F : M \rightarrow N$ glatt und X ein Vektorfeld auf M , und nehmen wir an, es gebe ein Vektorfeld Y auf N mit der Eigenschaft, dass für jedes $p \in M$ gilt $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$. In diesem Fall sagen wir, dass die Vektorfelder X und Y **F-verwandt** sind. Die nächste Proposition zeigt, wie F -verwandte Vektorfelder auf glatte Funktionen wirken.

Vorschlag 8.10. *Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Dann sind X und Y genau dann F -verwandt, wenn für jede glatte reellwertige Funktion f , die auf einer offenen Teilmenge von N definiert ist, gilt:*

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F. \quad (8.5)$$

Proof. Für jedes $p \in M$ und jede glatte reellwertige Funktion f , die in einer Umgebung von $F(p)$ definiert ist, gilt

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = dF_p(X_p)f,$$

während

$$(Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}f.$$

Somit gilt (8.5) für alle f genau dann, wenn $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ für alle p gilt, d.h., genau dann, wenn X und Y F -verwandt sind. $\square$

Beispiel 8.11. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die glatte Abbildung $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist $\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ F -verwandt zum Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, das definiert ist durch

$$Y = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Wir zeigen dies auf zwei verschiedene Arten.

Wir zeigen, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$dF_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = Y_{F(t)}.$$

Erinnern wir uns daran, dass für eine glatte Abbildung $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die in Koordinaten als $F(t) = (F^1(t), F^2(t))$ geschrieben wird, das Differential durch

$$dF_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \frac{dF^1}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} + \frac{dF^2}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)}$$

wirkt. Damit folgt

$$dF_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = -\sin t \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} + \cos t \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)}.$$

Nach der Definition von Y gilt

$$Y_{(x,y)} = -y \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + x \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)}.$$

Einsetzen von $(x, y) = F(t) = (\cos t, \sin t)$ ergibt

$$Y_{F(t)} = -\sin t \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} + \cos t \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)},$$

und somit

$$dF_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = Y_{F(t)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist $\frac{d}{dt} F$ -verwandt mit Y .

Wir können auch (8.5) verwenden, um dasselbe zu zeigen. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(f \circ F)(t) = \frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) = \frac{\partial f}{\partial x}(F(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial f}{\partial y}(F(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\sin t),$$

woraus

$$\frac{d}{dt}(f \circ F)(t) = -\sin t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(F(t)) + \cos t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(F(t))$$

folgt. Nach der Definition von Y gilt

$$(Yf)(x, y) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Einsetzen von $F(t) = (\cos t, \sin t)$ liefert

$$(Yf)(F(t)) = -\sin t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(F(t)) + \cos t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(F(t)),$$

und somit

$$\frac{d}{dt}(f \circ F)(t) = (Yf)(F(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und alle } f \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Daher ist $\frac{d}{dt} F$ -verwandt mit Y .

Es ist wichtig zu beachten, dass es für eine gegebene glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ möglicherweise *kein* Vektorfeld auf N gibt, das F -verwandt mit X ist. Es gibt jedoch einen Spezialfall, in dem stets ein solches Vektorfeld existiert, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 8.12. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert genau ein glattes Vektorfeld auf N , das F -verwandt mit X ist.

Proof. Dass $Y \in \mathfrak{X}(N)$ F -verwandt mit X ist, bedeutet, dass $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ für jedes $p \in M$ gilt. Ist F ein Diffeomorphismus, so definieren wir Y durch

$$Y_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}).$$

Es ist klar, dass das so definierte Y das eindeutige Vektorfeld ist, das F -verwandt mit X ist. Beachte, dass $Y : N \rightarrow TN$ die Komposition folgender glatter Abbildungen ist:

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{dF} TN.$$

Daraus folgt, dass Y glatt ist. □

Damit können wir folgende Definition treffen.

Definition 8.13 (Pushforwards und Pullbacks). Sei $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen den glatten Mannigfaltigkeiten M und N . Wir bezeichnen das eindeutige Vektorfeld, das F -verwandt mit X ist, mit F_*X und nennen es den **Pushforward von X unter F** . Es wird explizit beschrieben durch

$$(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}). \quad (8.6)$$

Der **Pullback eines Vektorfeldes** $Y \in \mathfrak{X}(N)$ wird mit F^*Y bezeichnet und ist definiert als

$$F^*Y = dF^{-1} \circ Y \circ F \in \mathfrak{X}(M). \quad (8.7)$$

Solange die Umkehrabbildung F^{-1} explizit berechnet werden kann, lässt sich der Pushforward eines Vektorfeldes direkt aus der Formel in (8.6) berechnen.

Berechnen wir den Pushforward eines Vektorfeldes explizit.

Seien M und N die folgenden offenen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$:

$$M = \{(x, y) : y > 0 \text{ und } x + y > 0\},$$

$$N = \{(u, v) : u > 0 \text{ und } v > 0\},$$

und sei $F : M \rightarrow N$ definiert durch $F(x, y) = (x + y, x/y + 1)$. Dann ist F ein Diffeomorphismus, da seine Umkehrabbildung leicht zu berechnen ist: man löse $(u, v) = (x + y, x/y + 1)$ nach x und y auf und erhalte die Formel $(x, y) = F^{-1}(u, v) = (u - u/v, u/v)$. Berechnen wir den Pushforward F_*X , wobei X das folgende glatte Vektorfeld auf M ist:

$$X_{(x,y)} = y^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)}.$$

Das Differential von F in einem Punkt $(x, y) \in M$ wird durch seine Jacobi-Matrix dargestellt,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix},$$

und somit wird $dF_{F^{-1}(u,v)}$ durch die Matrix

$$DF\left(u - \frac{u}{v}, \frac{u}{v}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{v}{u} & \frac{v-v^2}{u} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Für jedes $(u, v) \in N$ gilt

$$X_{F^{-1}(u,v)} = \frac{u^2}{v^2} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F^{-1}(u,v)}.$$

Anwendung von (8.6) mit $p = (u, v)$ liefert daher die Formel für F_*X :

$$(F_*X)_{(u,v)} = \frac{u^2}{v^2} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(u,v)} + \frac{u}{v} \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{(u,v)}.$$

8.5 Vektorfelder und Untermannigfaltigkeiten

Ist $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, so lässt sich ein Vektorfeld X auf M nicht notwendigerweise zu einem Vektorfeld auf S einschränken, da X_p in einem Punkt $p \in S$ möglicherweise nicht im Unterraum $T_p S \subseteq T_p M$ liegt. Für einen Punkt $p \in S$ heißt ein Vektorfeld X auf M **tangential an S in p** , falls $X_p \in T_p S \subseteq T_p M$. Es heißt **tangential an S** , falls es in jedem Punkt von S tangential an S ist.

Sei $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und Y ein glattes Vektorfeld auf M . Existiert ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S)$, das ι -verwandt mit Y ist, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet, so ist Y offensichtlich tangential an S , da $Y_p = d\iota_p(X_p)$ für jedes $p \in S$ im Bild von $d\iota_p$ liegt. Die nächste Proposition zeigt, dass auch die Umkehrung gilt.

Vorschlag 8.14 (Einschränkung von Vektorfeldern auf Untermannigfaltigkeiten). *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und bezeichne $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangential an S , so existiert ein eindeutiges glattes Vektorfeld auf S , mit $Y|_S$ bezeichnet, das ι -verwandt mit Y ist.*

Proof. Dass Y tangential an S ist, bedeutet per Definition, dass Y_p für jedes p im Bild von $d\iota_p$ liegt. Somit gibt es für jedes p einen Vektor $X_p \in T_p S$ mit $Y_p = d\iota_p(X_p)$. Da $d\iota_p$ injektiv ist, ist X_p eindeutig, und dies definiert X als Vektorfeld auf S . Können wir zeigen, dass X glatt ist, so ist es das eindeutige Vektorfeld, das ι -verwandt mit Y ist. Es genügt zu zeigen, dass es in einer Umgebung jedes Punktes glatt ist.

Sei p ein beliebiger Punkt in S . Da S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, sei $(U, (x^i))$ eine Slice-Karte in M , zentriert in p , so dass $S \cap U$ die Teilmenge ist, auf der $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ gilt, und $(x^1, \dots, x^k)$ lokale Koordinaten für S in U bilden. Ist $Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + Y^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ in diesen Koordinaten, so folgt aus unserer Konstruktion, dass X die Koordinatendarstellung $Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ besitzt, welche offensichtlich glatt auf U ist. $\square$

8.6 Lie-Klammern

In diesem Abschnitt führen wir eine wichtige Methode ein, zwei glatte Vektorfelder zu einem weiteren Vektorfeld zu kombinieren.

Seien X und Y glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Für eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ können wir X auf f anwenden und erhalten eine weitere glatte Funktion Xf . Wir können nun Y auf diese Funktion anwenden und erhalten eine weitere glatte Funktion $YXf = Y(Xf)$. Die Operation $f \mapsto YXf$ erfüllt jedoch im Allgemeinen nicht die Produktregel und kann daher kein Vektorfeld sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 8.15. Definiere die Vektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x}$ und $Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ auf $\mathbb{R}^2$ und sei $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$. Eine direkte Rechnung zeigt, dass $XY(fg) = 2x$, während $fXYg + gXYf = x$ ist, sodass XY keine Derivation von $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist.

Wir können auch dieselben zwei Vektorfelder in umgekehrter Reihenfolge anwenden und erhalten eine (meist andere) Funktion XYf . Wenden wir beide Operatoren auf f an und ziehen sie voneinander ab, so erhalten wir einen Operator

$$[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

genannt die **Lie-Klammer von X und Y** , definiert durch

$$[X, Y]f = XYf - YXf.$$

Die entscheidende Tatsache ist, dass dieser Operator tatsächlich ein Vektorfeld ist.

Lemma 8.16. *Die Lie-Klammer eines beliebigen Paares glatter Vektorfelder ist ein glattes Vektorfeld.*

Proof. Es genügt zu zeigen, dass $[X, Y]$ eine Derivation von $C^\infty(M)$ ist. Für beliebige $f, g \in C^\infty(M)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf \\ &\quad - YfXg - fYXg - YgXf - gYXf \\ &= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\ &= f[X, Y]g + g[X, Y]f. \end{aligned}$$

□

Der Wert des Vektorfeldes $[X, Y]$ in einem Punkt $p \in M$ ist die Derivation in p , die durch die Formel

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf) \quad (8.8)$$

gegeben ist. Diese Formel ist jedoch für Berechnungen nur von begrenztem Nutzen, da sie die Berechnung von Termen erfordert, die zweite Ableitungen von f enthalten, die sich stets gegenseitig aufheben. Die nächste Proposition liefert eine äußerst nützliche Koordinatenformel für die Lie-Klammer, in der die Aufhebungen bereits berücksichtigt wurden.

Vorschlag 8.17 (Koordinatenformel für die Lie-Klammer). Seien X, Y glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und seien $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ die Koordinatendarstellungen von X und Y bezüglich gewisser glatter lokaler Koordinaten (x^i) für M . Dann besitzt $[X, Y]$ die folgende Koordinatendarstellung:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (8.9)$$

oder kürzer,

$$[X, Y] = (XY^j - YX^j) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (8.10)$$

Proof. Da wir bereits wissen, dass $[X, Y]$ ein glattes Vektorfeld ist, ist seine Wirkung auf eine Funktion lokal bestimmt: $([X, Y]f)|_U = [X, Y](f|_U)$. Somit genügt es, in einer einzelnen glatten Karte zu rechnen, wo wir

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \end{aligned}$$

erhalten, wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass gemischte partielle Ableitungen einer glatten Funktion in beliebiger Reihenfolge gebildet werden können. Vertauschen der Rollen der Summationsindizes i und j im zweiten Term liefert (8.9). □

Eine triviale Anwendung von (8.9) besteht darin, die Lie-Klammern der Koordinatenvektorfelder $(\partial/\partial x^i)$ in einer beliebigen glatten Karte zu berechnen: Da die Komponentenfunktionen der Koordinatenvektorfelder allesamt konstant sind, folgt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \equiv 0 \quad \text{für alle } i \text{ und } j. \quad (8.11)$$

Beachte, dass dies auch aus der Definition der Lie-Klammer in (8.8) folgt und im Wesentlichen eine Umformulierung der Tatsache ist, dass gemischte partielle Ableitungen glatter Funktionen kommutieren. Hier ist eine etwas weniger triviale Rechnung.

Beispiel 8.18. Definiere die glatten Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ durch

$$\begin{aligned} X &= x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1) \frac{\partial}{\partial z}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dann liefert uns (8.10)

$$\begin{aligned} [X, Y] &= X(1) \frac{\partial}{\partial x} + X(y) \frac{\partial}{\partial z} - Y(x) \frac{\partial}{\partial x} - Y(1) \frac{\partial}{\partial y} - Y(x(y+1)) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= 0 \frac{\partial}{\partial x} + 1 \frac{\partial}{\partial z} - 1 \frac{\partial}{\partial x} - 0 \frac{\partial}{\partial y} - (y+1) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

was tatsächlich ein Vektorfeld ist.

Sehen wir uns nun einige grundlegende Eigenschaften der Lie-Klammer an.

Vorschlag 8.19 (Eigenschaften der Lie-Klammer). Die Lie-Klammer erfüllt die folgenden Identitäten für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) BILINEARITÄT: Für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y]. \end{aligned}$$

(b) ANTISYMMETRIE:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(c) JACOBI-IDENTITÄT:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(d) Für $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X. \quad (8.12)$$

Proof. Bilinearität und Antisymmetrie kann man selbst nachprüfen. Der Beweis der Jacobi-Identität ist lediglich eine Rechnung:

$$\begin{aligned} &[X, [Y, Z]]f + [Y, [Z, X]]f + [Z, [X, Y]]f \\ &= X[Y, Z]f - [Y, Z]Xf + Y[Z, X]f \\ &\quad - [Z, X]Yf + Z[X, Y]f - [X, Y]Zf \\ &= XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf + YZXf - YXZf \\ &\quad - ZXYf + XZYf + ZXYf - ZYXf - XYZf + YXZf. \end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck heben sich alle Terme paarweise auf. Teil (d) ist erneut eine direkte Rechnung aus der Definition der Lie-Klammer. Sei $h \in C^\infty(M)$. Wir haben

$$\begin{aligned} [fX, gY]h &= (fX)(gY)h - (gY)(fX)h \\ &= (fX)(gYh) - (gY)(fXh) \\ &= fg(XYh) + f(Xg)(Yh) - fg(YXh) - g(Yf)(Xh) \\ &= fg[X, Y]h + (fXg)Yh - (gYf)Xh. \end{aligned}$$

□

Die Bedeutung von Teil (d) dieser Proposition ist an dieser Stelle möglicherweise noch nicht offensichtlich, wird jedoch in den zukünftigen Vorlesungen klarer werden, wenn wir über die *Lie-Ableitung eines Vektorfeldes in Richtung eines anderen Vektorfeldes* sprechen, wo gezeigt wird, dass sie gleich der Lie-Klammer ist, und somit die Lie-Ableitung mittels Teil (d) tatsächlich eine Derivation darstellt.

Das nächste Resultat setzt die Lie-Klammer F -verwandter Vektorfelder in Beziehung.

Vorschlag 8.20 (Natürlichkeit der Lie-Klammer). Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ Vektorfelder, sodass X_i F -verwandt mit Y_i für $i = 1, 2$ ist. Dann ist $[X_1, X_2]$ F -verwandt mit $[Y_1, Y_2]$.

Proof. Mittels (8.5) und der Tatsache, dass X_i und Y_i F -verwandt sind, gilt

$$X_1X_2(f \circ F) = X_1((Y_2f) \circ F) = (Y_1Y_2f) \circ F.$$

Analog gilt

$$X_2X_1(f \circ F) = (Y_2Y_1f) \circ F.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1 Y_2 f) \circ F - (Y_2 Y_1 f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2] f) \circ F. \end{aligned}$$

□

In Spezialfällen angewendet, hat dieses Resultat folgende wichtige Korollare. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem die Abbildung ein Diffeomorphismus ist.

Folge 8.21. *Wir haben Folgendes.*

1. (Pushforwards von Lie-Klammern) Sei $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt $F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$.
2. (Klammern von Vektorfeldern, die tangential an Untermannigfaltigkeiten sind) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M . Sind Y_1 und Y_2 glatte Vektorfelder auf M , die tangential an S sind, so ist auch $[Y_1, Y_2]$ tangential an S .

Proof. 1. Dies ist lediglich der Spezialfall von Proposition 8.20, in dem F ein Diffeomorphismus ist und $Y_i = F_*X_i$ gilt.

2. Wir wissen, dass glatte Vektorfelder X_1 und X_2 auf S existieren, sodass X_i ι -verwandt mit Y_i für $i = 1, 2$ ist, wobei $\iota : S \rightarrow M$ die Inklusion bezeichnet. Nach Proposition 8.20 ist $[X_1, X_2]$ ι -verwandt mit $[Y_1, Y_2]$, welches daher tangential an S ist.

□

9. Integralkurven und Flüsse von Vektorfeldern

9.1 Integralkurven

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ist $\gamma: J \rightarrow M$ eine glatte Kurve, so ist für jedes $t \in J$ der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ ein Vektor in $T_{\gamma(t)}M$. Was ist mit dem umgekehrten Prozess? Das heißt: Gegeben $V \in \mathfrak{X}(M)$, können wir eine Kurve γ finden, deren Tangentialvektor jeweils dem entsprechenden Wert des Vektorfeldes entspricht?

Definition 9.1. Sei V ein Vektorfeld auf M . Eine **Integralkurve** von V ist eine differenzierbare Kurve $\gamma: J \rightarrow M$, deren Geschwindigkeit in jedem Punkt gleich dem Wert von V in diesem Punkt ist:

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \quad \text{für alle } t \in J. \quad (9.1)$$

Falls $0 \in J$, heißt der Punkt $\gamma(0)$ der **Startpunkt** von γ .

Bevor wir weiter in die Theorie einsteigen, betrachten wir einige einfache Beispiele.

Beispiel 9.2. Seien (x, y) die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$, und sei $V = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Dann ist

$$\gamma(t) = (a + t, b), \quad a, b \text{ Konstanten}$$

eine Integralkurve von V . Zu beachten ist, dass es zu jedem $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Integralkurve von V mit Startpunkt (p, q) gibt und dass die Bilder zweier Integralkurven entweder identisch oder disjunkt sind. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Integralkurven von V genau die Geraden parallel zur x -Achse sind.

Beispiel 9.3. Sei $W = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Ist $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, die in Standardkoordinaten als $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ geschrieben wird, so übersetzt sich die Bedingung $\gamma'(t) = W_{\gamma(t)}$ dafür, dass γ eine Integralkurve ist, in

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} - y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Durch Vergleich der Komponenten dieser Vektoren sehen wir, dass dies äquivalent zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}$$

ist. Diese Gleichungen haben die Lösungen

$$x(t) = a \cos t - b \sin t, \quad y(t) = a \sin t + b \cos t,$$

für beliebige Konstanten a und b . Somit ist jede Kurve der Form $\gamma(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$ eine Integralkurve von W mit Startpunkt (a, b) . Für $(a, b) = (0, 0)$ ist dies die konstante Kurve $\gamma(t) \equiv (0, 0)$; andernfalls handelt es sich um einen gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis. Daher sehen wir erneut, dass es zu jedem $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Integralkurve mit Startpunkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gibt und dass die Bilder der verschiedenen Integralkurven entweder identisch oder disjunkt sind.

Aus diesem Beispiel sehen wir, dass das Finden einer Integralkurve von V für gegebenes $V \in \mathfrak{X}(M)$ darauf hinausläuft, in einer glatten Karte ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen. Genauer: Sei V ein glattes Vektorfeld auf M und $\gamma: J \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Auf einem glatten Koordinatengebiet $U \subseteq M$ können wir γ in lokalen Koordinaten als $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ schreiben. Dann kann (9.1) dafür, dass γ eine Integralkurve von V ist, geschrieben werden als

$$\dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} = V^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)},$$

was sich auf das folgende autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^1(t) &= V^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}^n(t) &= V^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Das bedeutet, dass wir zur Sicherstellung der Existenz von Integralkurven eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen müssen. Daher erinnern wir zunächst an das folgende fundamentale Resultat über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Satz 9.4 (Fundamentalsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte vektorwertige Funktion. Betrachte das System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^i(t) &= V^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \quad i = 1, \dots, n, \\ \gamma^i(t_0) &= c^i, \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

mit $c = (c^1, \dots, c^n) \in U$. Dann gilt:

1. (Existenz) Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ existieren ein offenes Intervall $J_0 \ni t_0$ und eine offene Teilmenge $U_0 \subset U$ mit $x_0 \in U_0$, sodass für alle $c \in U_0$ eine C^1 -Kurve $\gamma : J_0 \rightarrow U$ existiert, die die Differentialgleichung löst.
2. (Eindeutigkeit) Je zwei Lösungen γ_1 und γ_2 der obigen Differentialgleichung stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.
3. Die Abbildung $\theta : J_0 \times U_0 \rightarrow U$, gegeben durch $\theta(t, x) = \gamma(t)$, wobei γ die eindeutige obige Lösung mit $\gamma(t_0) = x$ ist, ist glatt.

Aus diesem Satz erhalten wir das folgende einfache Resultat.

Vorschlag 9.5. *Sei V ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Für jeden Punkt $p \in M$ existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, die eine Integralkurve von V mit Startpunkt p ist. $\square$*

Wir bemerken einige elementare Eigenschaften von Integralkurven.

- Ist $a \in \mathbb{R}$ und ist $\gamma : J \rightarrow M$ eine Integralkurve von $V \in \mathfrak{X}(M)$, so ist die Kurve $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow M$, definiert durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$, eine Integralkurve des Vektorfeldes aV , wobei $\tilde{J} = \{t : at \in J\}$.

Beweis. Wir können die Wirkung von $\tilde{\gamma}'(t)$ auf eine glatte reellwertige Funktion f untersuchen, die in einer Umgebung eines Punktes $\tilde{\gamma}(t_0)$ definiert ist. Mit der Kettenregel und der Tatsache, dass γ eine Integralkurve von V ist, gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(t_0)f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at) \\ &= a(f \circ \gamma)'(at_0) = a\gamma'(at_0)f = aV_{\tilde{\gamma}(t_0)}f. \quad \square\end{aligned}$$

- Seien V , M , J und γ wie zuvor. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $\hat{\gamma} : \hat{J} \rightarrow M$, definiert durch $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t + b)$, ebenfalls eine Integralkurve von V , wobei $\hat{J} = \{t : t + b \in J\}$.
- Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann sind $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ genau dann F -verwandt, wenn F Integralkurven von X auf Integralkurven von Y abbildet, d. h. wenn für jede Integralkurve γ von X die Kurve $F \circ \gamma$ eine Integralkurve von Y ist.

Beweis. Angenommen zunächst, X und Y seien F -verwandt, und sei $\gamma : J \rightarrow M$ eine Integralkurve von X . Definieren wir $\sigma : J \rightarrow N$ durch $\sigma = F \circ \gamma$, so gilt

$$\sigma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = Y_{F(\gamma(t))} = Y_{\sigma(t)},$$

also ist σ eine Integralkurve von Y .

Umgekehrt nehme an, dass F Integralkurven von X auf Integralkurven von Y abbildet. Sei $p \in M$ gegeben, und sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Integralkurve von X mit Startpunkt p . Da $F \circ \gamma$ eine Integralkurve von Y mit Startpunkt $F(p)$ ist, gilt

$$Y_{F(p)} = (F \circ \gamma)'(0) = dF_p(\gamma'(0)) = dF_p(X_p),$$

was zeigt, dass X und Y F -verwandt sind. $\square$

9.2 Flüsse von Vektorfeldern

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V \in \mathfrak{X}(M)$. Angenommen, für jeden Punkt $p \in M$ besitzt V eine eindeutige Integralkurve mit Startpunkt p , die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist; wir bezeichnen sie mit $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$. (**Wir wissen nicht, ob dies immer möglich ist oder nicht.**) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ können wir eine Abbildung $\theta_t: M \rightarrow M$ definieren, indem wir jedem $p \in M$ den Punkt zuordnen, der entsteht, wenn man der Integralkurve mit Startpunkt p für die Zeit t folgt:

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Jede Abbildung θ_t „verschiebt“ die Mannigfaltigkeit entlang der Integralkurven um die Zeit t . Dann ist $t \mapsto \theta^{(p)}(t+s)$ eine Integralkurve von V mit Startpunkt $q = \theta^{(p)}(s)$, und da wir die Eindeutigkeit von Integralkurven voraussetzen, gilt $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t+s)$. Übersetzen wir dies in eine Aussage über die Abbildungen θ_t , so erhalten wir

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Zusammen mit der Gleichung $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, die per Definition gilt, impliziert dies, dass die Abbildung

$$\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \text{ eine Wirkung der additiven Gruppe } \mathbb{R} \text{ auf } M \text{ ist.}$$

Definition 9.6. Ein **globaler Fluss** auf M , manchmal auch **Einparameter-Gruppenwirkung** genannt, ist eine stetige linke $\mathbb{R}$ -Wirkung auf M ; das heißt, eine stetige Abbildung $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, die für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $p \in M$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t+s, p), \quad \theta(0, p) = p. \quad (9.3)$$

Zu einem globalen Fluss θ auf M gehören die folgenden zwei Familien von Abbildungen:

- Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definiere eine stetige Abbildung $\theta_t: M \rightarrow M$ durch

$$\theta_t(p) = \theta(t, p).$$

Diese erfüllen

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}, \quad \theta_0 = \text{Id}_M. \quad (9.4)$$

Wie bei jeder stetigen Gruppenwirkung ist jede Abbildung $\theta_t: M \rightarrow M$ ein Homöomorphismus; ist der Fluss glatt, so ist θ_t ein Diffeomorphismus.

- Für jedes $p \in M$ definiere eine Kurve $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$ durch

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p).$$

Das Bild dieser Kurve ist **die Bahn von p unter der Gruppenwirkung**.

Die nächste Proposition zeigt, dass jeder glatte globale Fluss von den Integralkurven eines gewissen glatten Vektorfeldes genau in der oben beschriebenen Weise stammt. Bevor wir das Resultat formulieren, geben wir die folgende Definition.

Definition 9.7. Ist $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein glatter globaler Fluss, so definieren wir für jedes $p \in M$ einen Tangentialvektor $V_p \in T_p M$ durch

$$V_p = \theta^{(p)'}(0). \quad (9.5)$$

Die Zuordnung $p \mapsto V_p$ ist ein Vektorfeld auf M , das **infinitesimaler Erzeuger von θ** genannt wird.

Lemma 9.8. Sei $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein glatter globaler Fluss auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Der infinitesimale Erzeuger V von θ ist ein glattes Vektorfeld auf M , und jede Kurve $\theta^{(p)}$ ist eine Integralkurve von V .

Proof. Um zu zeigen, dass V glatt ist, zeigen wir, dass Vf für jedes $f \in C^\infty(U)$, $U \subseteq M$, glatt ist. Für ein solches f und jedes $p \in U$ beachte man einfach:

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)'}(0)f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t, p)).$$

Da $f(\theta(t, p))$ durch Komposition eine glatte Funktion von (t, p) ist, ist auch ihre partielle Ableitung nach t glatt. Also hängt $Vf(p)$ glatt von p ab, und somit ist V glatt.

Als Nächstes müssen wir zeigen, dass $\theta^{(p)}$ eine Integralkurve von V ist, also dass $\theta^{(p)'}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$ für alle $p \in M$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und setze $q = \theta^{(p)}(t_0) = \theta_{t_0}(p)$. Zu zeigen ist also $\theta^{(p)'}(t_0) = V_q$. Nach dem Gruppengesetz gilt für alle t :

$$\theta^{(q)}(t) = \theta_t(q) = \theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t + t_0).$$

Daher gilt für jede glatte reellwertige Funktion f , die in einer Umgebung von q definiert ist,

$$\begin{aligned} V_q f &= \theta^{(q)'}(0)f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t + t_0)) \\ &= \theta^{(p)'}(t_0)f, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war. □

Beispiel 9.9 ((Globale Flüsse).) Die beiden in den Beispielen 9.2 und 9.3 beschriebenen Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ hatten beide Integralkurven, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind; daher erzeugen sie globale Flüsse. Mithilfe der Ergebnisse dieser Beispiele können wir die Flüsse explizit angeben.

(a) Der Fluss von $V = \partial/\partial x$ in $\mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\tau_t(x, y) = (x + t, y).$$

Für jedes von null verschiedene $t \in \mathbb{R}$ verschiebt τ_t die Ebene nach rechts ($t > 0$) bzw. nach links ($t < 0$) um die Strecke $|t|$.

(b) Der Fluss von $W = x \partial/\partial y - y \partial/\partial x$ ist die Abbildung $\theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\theta_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ rotiert θ_t die Ebene um den Winkel t um den Ursprung.

Also gilt:

Infinitesimale Erzeuger globaler Flüsse sind glatte Vektorfelder.

Es stellt sich eine natürliche Frage: **Gilt die Umkehrung der obigen Aussage, d. h. muss ein gegebenes glattes $V \in \mathfrak{X}(M)$ der infinitesimale Erzeuger eines globalen Flusses sein?** Betrachten wir einige Beispiele glatter Vektorfelder, deren Integralkurven nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Beispiel 9.10. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Standardkoordinaten (x, y) , und sei V das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ auf M . Die eindeutige Integralkurve von V mit Startpunkt $(-1, 0) \in M$ ist $\gamma(t) = (t - 1, 0)$. In diesem Fall kann γ jedoch nicht stetig über $t = 1$ hinaus fortgesetzt werden.

Beispiel 9.11. Sei M ganz $\mathbb{R}^2$, und sei $W = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$. Die eindeutige Integralkurve von W mit Startpunkt $(1, 0)$ ist

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0 \right).$$

Auch diese Kurve kann nicht über $t = 1$ hinaus fortgesetzt werden, da ihre x -Koordinate für $t \nearrow 1$ unbeschränkt wird.

Somit erzeugt nicht jedes glatte Vektorfeld V durch infinitesimale Erzeugung einen globalen Fluss.

Definition 9.12. Ist M eine Mannigfaltigkeit, so ist ein **Flussgebiet** für M eine offene Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $p \in M$ die Menge

$$\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

ein offenes Intervall ist, das 0 enthält.

Ein **Fluss** auf M ist eine stetige Abbildung $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$, wobei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ ein Flussgebiet ist, die die folgenden Gruppengesetze erfüllt: Für alle $p \in M$ gilt

$$\theta(0, p) = p, \tag{9.6}$$

und für alle $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ und $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$ mit $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ gilt

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p). \tag{9.7}$$

Der Fluss θ wird manchmal auch **lokaler Fluss** oder **lokale Einparameter-Gruppenwirkung** genannt.

Ist θ glatt, so wird der **infinitesimale Erzeuger von θ** durch $V_p = \theta^{(p)'}(0)$ definiert.

Analog zu Lemma 9.8 gilt das folgende Resultat.

Lemma 9.13. Ist $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ ein glatter Fluss, so ist der infinitesimale Erzeuger V von θ ein glattes Vektorfeld, und jede Kurve $\theta^{(p)}$ ist eine Integralkurve von V .

Wir treffen die folgende Definition.

Definition 9.14. Eine **maximale Integralkurve** ist eine Integralkurve, die nicht zu einer Integralkurve auf einem größeren offenen Intervall fortgesetzt werden kann, und ein **maximaler Fluss** ist ein Fluss, der keine Fortsetzung zu einem Fluss auf einem größeren Flussgebiet zulässt.

Der nächste Satz ist das Hauptergebnis über Flüsse von Vektorfeldern.

Satz 9.15 (Fundamentalsatz über Flüsse). Sei V ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Es gibt einen eindeutigen glatten maximalen Fluss $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$, dessen infinitesimaler Erzeuger V ist. Dieser Fluss besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes $p \in M$ ist die Kurve $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p .

(b) Ist $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, so ist $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ das Intervall $\mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.

(c) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

offen in M , und $\theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus mit Inverser θ_{-t} .

(d) Für jedes $(t, p) \in \mathcal{D}$ gilt $(\theta_t)_* V(p) = V(\theta_t(p))$.

Proof. Der Beweis ist etwas lang, daher gehen wir schrittweise vor. Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit in Teil (a). Aus Proposition 9.5 wissen wir, dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine Integralkurve existiert. Seien $\gamma, \tilde{\gamma}: J \rightarrow M$ zwei Integralkurven von V , die auf demselben offenen Intervall J definiert sind, und gelte $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ für ein $t_0 \in J$. Sei S die Menge aller $t \in J$ mit $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$. Offenbar ist $S \neq \emptyset$, da $t_0 \in S$ nach Voraussetzung. Außerdem ist S abgeschlossen in J : Ist (t_n) eine Folge in S , die gegen t konvergiert, so folgt aus der Stetigkeit von γ und $\tilde{\gamma}$, dass $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t_n) = \tilde{\gamma}(t)$, also $t \in S$. Wir zeigen nun, dass S auch offen ist, und verwenden dann die Zusammenhangseigenschaft von J , um $J = S$ zu erhalten. Sei $t_1 \in S$. Dann sind γ und $\tilde{\gamma}$ in einer glatten Koordinatenumgebung des Punktes $p = \gamma(t_1)$ beide Lösungen derselben gewöhnlichen Differentialgleichung mit derselben Anfangsbedingung $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1) = p$. Nach dem Eindeutigkeitsatz von Satz 9.4 gilt $\gamma \equiv \tilde{\gamma}$ auf einem Intervall, das t_1 enthält. Also ist S offen in J . Da J zusammenhängend ist, folgt $S = J$, also $\gamma = \tilde{\gamma}$ auf ganz J . Somit stimmen zwei Integralkurven, die in einem Punkt übereinstimmen, auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.

Wir beweisen nun die Maximalität der Integralkurve. Sei $p \in M$, und sei $\mathcal{D}^{(p)}$ die Vereinigung aller offenen Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$, die 0 enthalten und auf denen eine Integralkurve mit Startpunkt p definiert ist. Definiere $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ durch $\theta^{(p)}(t) = \gamma(t)$, wobei γ eine beliebige Integralkurve mit Startpunkt p ist, die auf einem offenen Intervall definiert ist, das 0 und t enthält. Für einen gegebenen Punkt t stimmen alle solchen Integralkurven an t überein, wie oben erläutert. Daher ist $\theta^{(p)}$ wohldefiniert, d. h. ihr Wert ist unabhängig von der gewählten Integralkurve, und sie ist offensichtlich die eindeutige maximale Integralkurve mit Startpunkt p .

Setze nun

$$\mathcal{D} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$$

und definiere $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ durch $\theta(t, p) = \theta^{(p)}(t)$. Per Definition erfüllt θ Eigenschaft (a) der Satzaussage: Für jedes $p \in M$ ist $\theta^{(p)}$ die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p . Um zu überprüfen, dass θ tatsächlich ein Fluss ist, müssen wir die Gruppengesetze nachweisen. Fixiere $p \in M$ und $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, und schreibe $q = \theta(s, p) = \theta^{(p)}(s)$. Die Kurve $\gamma: \mathcal{D}^{(p)} - s \rightarrow M$, definiert durch $\gamma(t) = \theta^{(p)}(t + s)$, startet in q , und die Translationseigenschaft von Integralkurven zeigt, dass γ eine Integralkurve von V ist. Nach der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen stimmt γ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich mit $\theta^{(q)}$ überein. Dies ist äquivalent zum zweiten Gruppengesetz (9.7); das erste Gruppengesetz (9.6) folgt direkt aus der Definition. Also ist θ tatsächlich ein Fluss.

Aus der Maximalität von $\theta^{(q)}$ folgt, dass der Definitionsbereich von γ nicht größer als $\mathcal{D}^{(q)}$ sein kann, also $\mathcal{D}^{(p)} - s \subseteq \mathcal{D}^{(q)}$. Da $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$, folgt daraus $-s \in \mathcal{D}^{(q)}$, und das Gruppengesetz liefert $\theta^{(q)}(-s) = p$. Wenden wir dasselbe Argument mit $(-s, q)$ anstelle von (s, p) an, so erhalten wir $\mathcal{D}^{(q)} + s \subseteq \mathcal{D}^{(p)}$, was äquivalent ist zu $\mathcal{D}^{(q)} \subseteq \mathcal{D}^{(p)} - s$. Damit ist Teil (b) bewiesen.

Wir setzen den Beweis von Teil (a) fort, indem wir die Existenz einer solchen Integralkurve zeigen. Zuerst zeigen wir, dass $\mathcal{D}$ offen in $\mathbb{R} \times M$ ist (also ein Flussgebiet ist) und dass $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ glatt ist. Definiere eine Teilmenge $W \subseteq \mathcal{D}$ als die Menge aller $(t, p) \in \mathcal{D}$, für die θ auf einer Produktumgebung von (t, p) der Form $J \times U \subseteq \mathcal{D}$ definiert und glatt ist, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist und $U \subseteq M$ eine Umgebung von p ist. Dann ist W offen in $\mathbb{R} \times M$, und die Einschränkung von θ auf W ist glatt. Es genügt also zu zeigen, dass $W = \mathcal{D}$. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existiert ein Punkt $(\tau, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$. Ohne Einschränkung sei $\tau > 0$.

Sei

$$t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, p_0) \notin W\}.$$

Nach dem Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen ist θ in einer Produktumgebung von $(0, p_0)$ definiert und glatt, also gilt $t_0 > 0$. Da $t_0 \leq \tau$ und $\mathcal{D}^{(p_0)}$ ein offenes Intervall ist, das 0 und τ enthält, folgt $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$. Sei $q_0 = \theta^{(p_0)}(t_0)$. Wiederum nach dem Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U_0 von q_0 , sodass $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subseteq W$. Wir verwenden nun das Gruppengesetz, um zu zeigen, dass θ glatt auf eine Umgebung von (t_0, p_0) fortgesetzt werden kann, was unserer Wahl von t_0 widerspricht.

Wähle ein $t_1 < t_0$ mit $t_1 + \varepsilon > t_0$ und $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$. Da $t_1 < t_0$, gilt $(t_1, p_0) \in W$, und daher gibt es eine Produktumgebung $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subseteq W$. Nach Definition von W bedeutet dies, dass θ auf $[0, t_1 + \delta) \times U_1$ definiert und glatt ist. Da $\theta(t_1, p_0) \in U_0$, können wir U_1 so klein wählen, dass θ die Menge $\{t_1\} \times U_1$ nach U_0 abbildet. Definiere $\tilde{\theta}: [0, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \rightarrow M$ durch

$$\tilde{\theta}(t, p) = \begin{cases} \theta_t(p), & p \in U_1, 0 \leq t < t_1, \\ \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & p \in U_1, t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Das Gruppengesetz für θ garantiert, dass diese Definitionen auf dem Überlappungsbereich übereinstimmen, und unsere Wahl von U_1 , t_1 und ε stellt sicher, dass dies eine glatte Abbildung definiert. Durch die Translationseigenschaft ist für jedes p die Abbildung $t \mapsto \tilde{\theta}(t, p)$ eine Integralkurve von V , also ist $\tilde{\theta}$ eine glatte Fortsetzung von θ auf eine Umgebung von (t_0, p_0) . Dies widerspricht der Wahl von t_0 . Damit ist $W = \mathcal{D}$ gezeigt und der Beweis von Teil (a) abgeschlossen.

Wir beweisen nun (c). Dass M_t offen ist, folgt unmittelbar daraus, dass $\mathcal{D}$ offen ist. Aus Teil (b) erhalten wir

$$\begin{aligned} p \in M_t \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} &\Rightarrow \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t \\ &\Rightarrow -t \in \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} \Rightarrow \theta_t(p) \in M_{-t}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass θ_t die Menge M_t nach M_{-t} abbildet. Außerdem zeigen die Gruppengesetze, dass $\theta_{-t} \circ \theta_t$ auf M_t die Identität ist. Vertauscht man die Rollen von t und $-t$, so erhält man, dass $\theta_t \circ \theta_{-t}$ auf M_{-t} die Identität ist. Damit ist θ_t ein Diffeomorphismus.

Schließlich beweisen wir Teil (d). Sei $\theta(t_0, p) = q$. Wir möchten zeigen, dass $(\theta_{t_0})_*(V(p)) = V(\theta_{t_0}(p)) = V(q)$. Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((\theta_{t_0})_*(V(p)))f &= V_p(f \circ \theta_{t_0}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \theta_{t_0} \circ \theta^p(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta_{t_0+t}(p)) \quad (\text{mit dem Gruppengesetz}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^q(t)) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta^q(t) \right) f = V(q)f \quad (\text{da } \theta^q \text{ eine Integralkurve von } V \text{ ist}), \end{aligned}$$

womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist. □

Definition 9.16. Der Fluss θ in Satz 9.15 heißt der **von V erzeugte Fluss** oder einfach der **Fluss von V** .

Heuristisch stammt der Begriff „infinitesimaler Erzeuger“ daher, dass in einer glatten Karte eine gute Approximation an eine Integralkurve erhalten werden kann, indem man viele kleine Geradenstücke zusammensetzt, wobei Richtung und Länge jeder Bewegung durch den Wert des Vektorfeldes an dem Punkt bestimmt werden, den man im vorherigen Schritt erreicht hat. Intuitiv kann man sich einen Fluss als eine Folge von unendlich vielen infinitesimal kleinen linearen Schritten vorstellen; daher „erzeugt“ V den Fluss θ .

Vorschlag 9.17 (Natürlichkeit von Flüssen). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, und seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Sei θ der Fluss von X und η der Fluss von Y . Sind X und Y F -verwandt, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$, dass $F(M_t) \subseteq N_t$ und $\eta_t \circ F = F \circ \theta_t$ auf M_t :

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{F} & N_t \\ \theta_t \downarrow & & \downarrow \eta_t \\ M_{-t} & \xrightarrow{F} & N_{-t}. \end{array}$$

Proof. Aus der Eigenschaft von Integralkurven wissen wir, dass für jedes $p \in M$ die Kurve $F \circ \theta^{(p)}$ eine Integralkurve von Y mit Startpunkt $F \circ \theta^{(p)}(0) = F(p)$ ist. Daher muss nach Eindeutigkeit von Integralkurven die maximale Integralkurve $\eta^{(F(p))}$ mindestens auf dem Intervall $\mathcal{D}^{(p)}$ definiert sein, und es gilt $F \circ \theta^{(p)} = \eta^{(F(p))}$ auf diesem Intervall. Das bedeutet:

$$p \in M_t \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(F(p))} \Rightarrow F(p) \in N_t,$$

was äquivalent zu $F(M_t) \subseteq N_t$ ist, und

$$F(\theta^{(p)}(t)) = \eta^{(F(p))}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{D}^{(p)},$$

was äquivalent zu $\eta_t \circ F(p) = F \circ \theta_t(p)$ für alle $p \in M_t$ ist. $\square$

Als Korollar erhalten wir: Ist $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und ist θ der Fluss eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist der Fluss von F_*X gegeben durch

$$\eta_t = F \circ \theta_t \circ F^{-1},$$

mit Definitionsbereich $N_t = F(M_t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

9.3 Vollständige Vektorfelder

Definition 9.18 (Vollständige Vektorfelder). Ein glattes Vektorfeld heißt **vollständig**, wenn es einen globalen Fluss erzeugt, oder äquivalent, wenn jede seiner maximalen Integralkurven für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Es ist nicht immer leicht, einem Vektorfeld direkt anzusehen, ob es vollständig ist oder nicht. Wenn man die Differentialgleichung explizit lösen kann, um alle Integralkurven zu bestimmen, und diese für alle Zeiten existieren, dann ist das Vektorfeld vollständig. Andererseits ist es nicht vollständig, wenn man eine einzige Integralkurve finden kann, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann, wie wir es in den obigen Beispielen getan haben. Häufig ist es jedoch unmöglich, die Differentialgleichung explizit zu lösen; daher ist es nützlich, allgemeine Kriterien zu haben, um zu bestimmen, wann ein Vektorfeld vollständig ist.

Wir werden unten zeigen, dass alle glatt kompakt getragenen Vektorfelder und daher alle glatten Vektorfelder auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig sind. Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma.

Lemma 9.19. Sei V ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , und sei θ sein Fluss. Angenommen, es gibt eine positive Zahl ε , sodass für jedes $p \in M$ der Definitionsbereich von $\theta^{(p)}$ das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ enthält. Dann ist V vollständig.

Bemerkung 9.20. Was besagt dieses Lemma eigentlich? Es besagt, dass, wenn eine Integralkurve eines Vektorfeldes aufhört zu existieren, das Vektorfeld in endlicher Zeit „explodieren“ muss. Mit anderen Worten: Wenn eine Integralkurve eines Vektorfeldes für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit auch nur für eine kurze einheitliche Zeit existieren kann, dann muss sie für alle Zeiten existieren.

Proof. Wir beweisen dies durch Widerspruch. Die grundlegende Idee ist, die Translationseigenschaft von Integralkurven zu verwenden. Angenommen, für ein $p \in M$ sei der Definitionsbereich $\mathcal{D}^{(p)}$ von $\theta^{(p)}$ nach oben beschränkt. (Ein ähnlicher Beweis funktioniert, wenn er nach unten beschränkt ist.) Sei $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$, sei t_0 eine positive Zahl mit $b - \varepsilon < t_0 < b$, und sei $q = \theta^{(p)}(t_0)$. Die Voraussetzung impliziert, dass $\theta^{(q)}$ mindestens für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Definiere eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & -\varepsilon < t < b, \\ \theta^{(q)}(t - t_0), & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Diese beiden Definitionen stimmen dort überein, wo sie sich überlappen, denn

$$\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = \theta_{t-t_0} \circ \theta_{t_0}(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$$

nach dem Gruppengesetz für θ . Durch die Translationseigenschaft ist γ eine Integralkurve mit Startpunkt p . Da $t_0 + \varepsilon > b$, bedeutet dies, dass γ mit Startpunkt p über b hinaus existiert, was der Definition von b widerspricht. Somit existiert γ für alle $t \in \mathbb{R}$, und daher ist V ein vollständiges Vektorfeld. $\square$

Satz 9.21. Jedes glatt kompakt getragene Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist vollständig. Insbesondere ist auf einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit jedes glatte Vektorfeld vollständig.

Proof. Sei V ein kompakt getragenes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , und sei $K = \text{supp } V$. Für jedes $p \in K$ gibt es eine Umgebung U_p von p und eine positive Zahl ε_p , sodass der Fluss von V mindestens auf $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p$ definiert ist. Wegen der Kompaktheit überdecken endlich viele solcher Mengen $U_{p_1}, \dots, U_{p_k}$ die Menge K . Mit

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$$

folgt, dass jede maximale Integralkurve mit Startpunkt in K mindestens auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Da $V \equiv 0$ außerhalb von K gilt, ist jede Integralkurve mit Startpunkt in $M \setminus K$ konstant und kann daher auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden. Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 9.19 erfüllt, und daher ist V vollständig. $\square$

10. Lie-Ableitungen

Wir wissen, wie man reellwertige Funktionen in Richtung eines Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit differenziert. In der Tat ist ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ per Definition ein Operator, der auf eine glatte Funktion f wirkt und eine Zahl vf liefert, die wir als Richtungsableitung von f in p interpretieren. Wie können wir Richtungsableitungen eines Vektorfeldes in Richtung eines gegebenen Vektors sinnvoll definieren? Beginnen wir mit dem vertrauten Fall der euklidischen Räume. Wir können die Richtungsableitung eines glatten Vektorfeldes W in Richtung eines Vektors $v \in T_p \mathbb{R}^n$ definieren. Sie ist der Vektor

$$D_v W(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} W_{p+tv} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_{p+tv} - W_p}{t}. \quad (10.1)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $D_v W(p)$ ausgewertet werden kann, indem man D_v auf jede Komponente von W einzeln anwendet:

$$D_v W(p) = D_v W^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Leider hängt diese Definition stark davon ab, dass $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum ist, sodass die Tangentialvektoren W_{p+tv} und W_p beide als Elemente von $\mathbb{R}^n$ aufgefasst werden können. Wenn wir (10.1) auf einer Mannigfaltigkeit nachahmen wollen, können wir versuchen, $p + tv$ durch eine Kurve $\gamma(t)$ zu ersetzen, die in p beginnt und deren Anfangsgeschwindigkeit v ist. Aber selbst mit dieser Ersetzung ergibt der Differenzenquotient immer noch keinen Sinn, da $W_{\gamma(t)}$ und $W_{\gamma(0)}$ Elemente der beiden verschiedenen Vektorräume $T_{\gamma(t)} M$ bzw. $T_{\gamma(0)} M$ sind. Im euklidischen Raum war das kein Problem, weil es eine kanonische Identifizierung jedes Tangentialraums mit $\mathbb{R}^n$ selbst gibt; aber auf einer Mannigfaltigkeit gibt es keine solche Identifizierung. Daher gibt es keine koordinatenunabhängige Möglichkeit, die Richtungsableitung von W in Richtung eines Vektors v sinnvoll zu definieren.

Wir beheben dieses Problem, indem wir den Vektor $v \in T_p M$ durch ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(M)$ ersetzen, sodass wir den Fluss von V verwenden können, um Werte von W nach p zurückzuschieben und dann zu differenzieren.

Definition 10.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, V ein glattes Vektorfeld auf M und θ der Fluss von V . Für jedes glatte Vektorfeld W auf M definieren wir ein Vektorfeld auf M , bezeichnet mit $\mathcal{L}_V W$ und genannt die **Lie-Ableitung von W bezüglich V** , durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V W)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} (W_{\theta_t(p)}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} (W_{\theta_t(p)}) - W_p}{t}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

sofern die Ableitung existiert.

Für kleine $t \neq 0$ ergibt zumindest der Differenzenquotient Sinn: θ_t ist in einer Umgebung von p definiert, und θ_{-t} ist die Inverse von θ_t , sodass sowohl $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} (W_{\theta_t(p)})$ als auch W_p Elemente von $T_p M$ sind.

Lemma 10.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Dann existiert $(\mathcal{L}_V W)_p$ für jedes $p \in M$, und $\mathcal{L}_V W$ ist ein glattes Vektorfeld.

Proof. Wir prüfen, dass die Komponentenfunktionen des Vektorfeldes $\mathcal{L}_V W$ in jeder Koordinatenkarte glatt sind. Sei θ der Fluss von V und für ein beliebiges $p \in M$ sei $(U, (x^i))$ eine glatte Karte, die p enthält. Wähle ein offenes Intervall J_0 , das 0 enthält, und eine offene Teilmenge $U_0 \subseteq U$, die p enthält, sodass $\theta|_{J_0 \times U_0}$ in U abbildet. Das können wir stets mit Hilfe der Stetigkeit des Flusses θ tun. Für $(t, x) \in J_0 \times U_0$ schreiben wir die Komponentenfunktionen von θ als $(\theta^1(t, x), \dots, \theta^n(t, x))$. Dann ist für jedes $(t, x) \in J_0 \times U_0$ die Matrix von $d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)} : T_{\theta_t(x)} M \rightarrow T_x M$ gegeben durch

$$\left[\frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, x)) \right]_{ij},$$

und folglich

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)} (W_{\theta_t(x)}) = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, x)) W^j(\theta(t, x)) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x.$$

Da θ^i und W^j glatte Funktionen sind, hängt der Koeffizient von $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$ glatt von (t, x) ab. Daraus folgt, dass $(\mathcal{L}_V W)_x$, das man durch Ableiten dieses Ausdrucks nach t und Einsetzen von $t = 0$ erhält, für jedes $x \in U_0$ existiert und glatt von x abhängt. $\square$

Während Gleichung 10.2 genau erklärt, wie man die Ableitung eines Vektorfeldes in Richtung eines anderen sinnvoll definiert, ist sie für explizite Berechnungen nicht sehr nützlich, da der Fluss typischerweise schwierig oder unmöglich explizit aufzuschreiben ist. Glücklicherweise gibt es eine einfache Formel zur Berechnung der Lie-Ableitung, ohne den Fluss explizit zu bestimmen.

Satz 10.3. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so gilt $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Proof. Sei θ der Fluss von X und sei $p \in M$. Wir bemerken zunächst, dass (10.2) äquivalent zum Ausdruck

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}(\theta_t^* Y)_p|_{t=0}, \quad \text{wobei } (\theta_t^* Y)_p = (\theta_t^{-1})^*_{\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)}$$

ist.

Erinnern wir uns auch daran, dass für jedes $f \in C^\infty(M)$ gilt $(Xf)_p = \frac{d}{dt}(\theta_t^* f)_p|_{t=0}$, wobei $\theta_t^* f = f \circ \theta_t$, und analog haben wir $(\theta_t^* Yf)_p = (\theta_t^* Y)_p(\theta_t^* f)$. Wir verwenden nun all dies und rechnen. Wir haben

$$(X(Yf))_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Yf)_p - (Yf)_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p(\theta_t^* f) - (Yf)_p}{t}.$$

Wir addieren und subtrahieren $(\theta_t^* Y)_p f$ und erhalten

$$\begin{aligned} (X(Yf))_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p(\theta_t^* f) - (\theta_t^* Y)_p f + (\theta_t^* Y)_p f - Y_p f}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\theta_t^* Y)_p \frac{(\theta_t^* f) - f}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p - Y_p}{t} f = Y_p Xf + (\mathcal{L}_X Y)_p. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir, dass $XY = YX + \mathcal{L}_X Y$. □

Wir haben nun eine geometrische Interpretation der Lie-Klammer zweier Vektorfelder: Sie ist die Richtungsableitung des zweiten Vektorfeldes entlang des Flusses des ersten. Daraus ergibt sich unmittelbar Folgendes.

Vorschlag 10.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. $\mathcal{L}_V W = -\mathcal{L}_W V$.
2. $\mathcal{L}_V [W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$.
3. $\mathcal{L}_{[V, W]} X = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V X$.
4. Wenn $g \in C^\infty(M)$, dann gilt $\mathcal{L}_V (gW) = (Vg)W + g\mathcal{L}_V W$.
5. Wenn $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, dann gilt $F_*(\mathcal{L}_V X) = \mathcal{L}_{F_* V} F_* X$.

Man beachte, dass Proposition 10.4 (d) unmittelbar aus Proposition 8.19 (d) folgt, und sie hat diese Form, weil die Lie-Klammer $[fV, gW]$ als die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_{fV}(gW)$ aufgefasst werden kann, sie erfüllt eine Produktregel in g und W ; und da sie auch als $-\mathcal{L}_{gW}(fV)$ aufgefasst werden kann, erfüllt sie ebenfalls eine Produktregel in f und V .

Sind V und W Vektorfelder auf M und θ der Fluss von V , so drückt die Lie-Ableitung $(\mathcal{L}_V W)_p$ per Definition die t -Ableitung des zeitabhängigen Vektors $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) \in T_p M$ bei $t = 0$ aus. Die nächste Proposition zeigt, wie sie auch verwendet werden kann, um die Ableitung dieses Ausdrucks zu anderen Zeitpunkten zu berechnen.

Vorschlag 10.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Sei θ der Fluss von V . Für jedes (t_0, p) im Definitionsbereich von θ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = d(\theta_{-t_0})((\mathcal{L}_V W)_{\theta_{t_0}(p)}). \quad (10.3)$$

Proof. Sei $p \in M$ beliebig, sei $\mathcal{D}^{(p)} \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich der Integralkurve $\theta^{(p)}$, und betrachte die Abbildung $X : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow T_p M$, gegeben durch $X(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)})$. Dieselbe Idee wie im Beweis von Lemma 10.2 zeigt,

dass X eine glatte Kurve im Vektorraum $T_p M$ ist. Durch die Variablensubstitution $t = t_0 + s$ erhalten wir

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} X(t_0 + s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{-t_0-s})(W_{\theta_{s+t_0}(p)}) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{-t_0}) \circ d(\theta_{-s})(W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \\ &= d(\theta_{-t_0}) \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{-s})(W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, weil $d(\theta_{-t_0}) : T_{\theta_{t_0}(p)} M \rightarrow T_p M$ eine lineare Abbildung ist, die unabhängig von s ist. Nach der Definition der Lie-Ableitung ist dieser letzte Ausdruck gleich der rechten Seite von (10.3). $\square$

10.1 Kommutierende Vektorfelder

Definition 10.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Wir sagen, dass V und W **kommutieren**, wenn $VWf = WVf$ für jede glatte Funktion f gilt, oder äquivalent, wenn $[V, W] \equiv 0$ ist.

Ist θ ein glatter Fluss, so heißt ein Vektorfeld W **invariant unter θ** , wenn W für jedes t mit sich selbst θ_t -verwandt ist, oder äquivalent, wenn $d(\theta_t)_p(W_p) = W_{\theta_t(p)}$ für alle (t, p) im Definitionsbereich von θ gilt.

Die nächste Proposition zeigt, dass diese beiden Begriffe eng miteinander verbunden sind.

Vorschlag 10.7. Für glatte Vektorfelder V und W auf einer glatten Mannigfaltigkeit M sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) V und W kommutieren.
- (b) W ist invariant unter dem Fluss von V .
- (c) V ist invariant unter dem Fluss von W .

Folglich ist jedes glatte Vektorfeld invariant unter seinem eigenen Fluss.

Proof. Sei $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, und bezeichne θ den Fluss von V . Wir beweisen (b) $\implies$ (a). Wenn (b) gilt, dann ist $W_{\theta_t(p)} = d(\theta_t)_p(W_p)$, wann immer (t, p) im Definitionsbereich von θ liegt. Wendet man $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$ auf beide Seiten an, so schließen wir, dass $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = W_p$ gilt, was nach der Definition der Lie-Ableitung oder (10.2) $[V, W] = \mathcal{L}_V W = 0$ impliziert. Dasselbe Argument zeigt, dass (c) (a) impliziert.

Um zu zeigen, dass (a) (b) impliziert, nehmen wir an, dass $[V, W] = \mathcal{L}_V W = 0$. Sei $p \in M$ beliebig, und sei $X(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)})$ für $t \in \mathcal{D}^{(p)}$. Proposition 10.5 zeigt, dass $X'(t) \equiv 0$. Da $X(0) = W_p$, impliziert dies, dass $X(t) = W_p$ für alle $t \in \mathcal{D}^{(p)}$ gilt, und das Anwenden von $d(\theta_t)_p$ auf beide Seiten liefert die Identität, die besagt, dass W invariant unter θ ist. Analog impliziert (a) (c). $\square$

Wir setzen nun kommutierende Vektorfelder in Beziehung zur Beziehung zwischen ihren jeweiligen Flüssen. Genauer gesagt wird der nächste Satz beweisen, dass zwei Vektorfelder genau dann kommutieren, wenn ihre Flüsse kommutieren. Aber was bedeutet es, dass zwei Flüsse miteinander kommutieren?

Seien V und W glatte Vektorfelder auf M , und seien θ und ψ ihre jeweiligen Flüsse. Wenn V und W vollständige Vektorfelder sind und somit θ und ψ globale Flüsse, so bedeutet das Kommutieren ihrer Flüsse, dass

$$\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Wenn jedoch entweder V oder W nicht vollständig ist, können wir höchstens hoffen, dass diese Gleichung für alle s und t gilt, für die beide Seiten definiert sind.

Leider müssen ihre Flüsse selbst dann nicht in diesem naiven Sinne kommutieren, wenn die Vektorfelder kommutieren, denn es gibt Beispiele kommutierender Vektorfelder V und W sowie spezielle Wahlen von t, s und p , für die sowohl $\theta_t \circ \psi_s(p)$ als auch $\psi_s \circ \theta_t(p)$ definiert sind, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 10.8. Betrachte $\mathbb{R}^3$ und betrachte die Vektorfelder

$$V = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Seien θ und ψ der Fluss von V bzw. W . Zeige, dass V und W kommutieren, aber es existieren $p \in \mathbb{R}^3$ und $s, t \in \mathbb{R}$, sodass $\theta_t \circ \psi_s(p)$ und $\psi_s \circ \theta_t(p)$ beide existieren, aber nicht gleich sind. (**Hinweis:** Zum Beispiel erfüllen $p = (1, -1, 0)$ und $s = 2, t = -2$ die Bedingung. Vielleicht schreibe die Gleichung für die Integralkurven auf.)

Hier ist das Problem: Wenn $\theta_t \circ \psi_s(p)$ für $t = t_0$ und $s = s_0$ definiert ist, dann muss es nach den Eigenschaften der Flussdomänen für alle t in einem offenen Intervall, das 0 und t_0 enthält, definiert sein, aber die analoge Aussage muss für s nicht gelten – es könnte Werte von s zwischen 0 und s_0 geben, für die sich die in $\psi_s(p)$ startende Integralkurve von V nicht bis $t = t_0$ erstreckt.

Daher treffen wir folgende Definition.

Definition 10.9. Sind θ und ψ Flüsse auf M , so sagen wir, dass θ und ψ **kommutieren**, wenn die folgende Bedingung für jedes $p \in M$ gilt: Wann immer J und K offene Intervalle sind, die 0 enthalten, sodass einer der Ausdrücke $\theta_t \circ \psi_s(p)$ oder $\psi_s \circ \theta_t(p)$ für alle $(s, t) \in J \times K$ definiert ist, sind beide definiert und gleich. Für globale Flüsse ist dies dasselbe, wie zu sagen, dass $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$ für alle s und t gilt.

Hier ist das Hauptresultat für kommutierende Flüsse.

Satz 10.10. Glatte Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren.

Proof. Seien V und W glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , und seien θ und ψ ihre jeweiligen Flüsse. Nehmen wir zunächst an, dass V und W kommutieren. Angenommen, $p \in M$, und J und K sind offene Intervalle, die 0 enthalten, sodass $\psi_s \circ \theta_t(p)$ für alle $(s, t) \in J \times K$ definiert ist. Nach Proposition 10.7 impliziert die Voraussetzung, dass V invariant unter ψ ist. Fixiere ein beliebiges $s \in J$ und betrachte die Kurve $\gamma : K \rightarrow M$, definiert durch $\gamma(t) = \psi_s \circ \theta_t(p) = \psi_s(\theta^{(p)}(t))$. Diese Kurve erfüllt $\gamma(0) = \psi_s(p)$, und ihre Geschwindigkeit bei $t \in K$ ist

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(\psi_s(\theta^{(p)}(t))) = d(\psi_s)(\theta^{(p)'}(t)) = d(\psi_s)(V_{\theta^{(p)}(t)}) = V_{\gamma(t)}.$$

Somit ist γ eine Integralkurve von V , die in $\psi_s(p)$ beginnt. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt daher

$$\gamma(t) = \theta^{\psi_s(p)}(t) = \theta_t(\psi_s(p)).$$

Dies beweist, dass θ und ψ kommutieren.

Nehmen wir umgekehrt an, dass die Flüsse kommutieren, und sei $p \in M$. Wenn $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\psi_s \circ \theta_t(p)$ definiert ist, wann immer $|s| < \varepsilon$ und $|t| < \varepsilon$, dann garantiert die Voraussetzung, dass $\psi_s \circ \theta_t(p) = \theta_t \circ \psi_s(p)$ für alle solchen s und t gilt. Dies lässt sich in der Form

$$\psi^{\theta_t(p)}(s) = \theta_t(\psi^{(p)}(s))$$

umschreiben. Differenziert man diese Beziehung nach s , so erhält man

$$W_{\theta_t(p)} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \psi^{\theta_t(p)}(s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \theta_t(\psi^{(p)}(s)) = d(\theta_t)_p(W_p).$$

Wendet man $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$ auf beide Seiten an, so schließen wir

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = W_p.$$

Differenziert man nach t und wendet die Definition der Lie-Ableitung an, so zeigt sich, dass $(\mathcal{L}_V W)_p = 0$. □

11. Kotangentialbündel und 1-Formen

Wir erinnern daran, dass für einen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V der Raum aller linearen Funktionale, d. h. linearer Abbildungen $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$, mit V^* bezeichnet wird und der **Dualraum** von V genannt wird. Elemente von V^* heißen **Kovektoren** auf V . Tatsächlich erhält man sofort eine Basis von V^* , sobald man eine Basis von V wählt, wie im folgenden Satz angegeben.

Vorschlag 11.1. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für eine beliebige Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V seien $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ die Kovektoren, die definiert sind durch

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i,$$

wobei δ_j^i das Kronecker-Delta-Symbol ist. Dann ist $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ eine Basis von V^* , die **duale Basis** zu (E_j) genannt wird, und somit gilt $\dim V^* = \dim V$.

Für die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ wird die duale Basis beispielsweise mit $(e^1, \dots, e^n)$ bezeichnet und **Standard-Dualbasis** genannt. Man beachte, dass wir obere Indizes zur Bezeichnung der Kovektoren verwenden. Diese Basis-Kovektoren sind die linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$e^i(v) = e^i(v^1, \dots, v^n) = v^i.$$

In Matrixschreibweise wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ durch eine $1 \times n$ -Matrix dargestellt, d. h. sie ist eine **Zeilenmatrix**. Die Basis-Kovektoren können daher auch als die linearen Funktionale aufgefasst werden, die durch die Zeilenmatrizen

$$e^1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad e^2 = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad \dots, \quad e^n = (0 \ \dots \ 0 \ 1)$$

dargestellt werden. Im Allgemeinen gilt: Ist (e_j) eine Basis von V und (ε^i) die zugehörige duale Basis, dann gilt für jeden Vektor $v = v^j e_j \in V$

$$\varepsilon^i(v) = v^j \varepsilon^i(e_j) = v^j \delta_j^i = v^i.$$

Einen beliebigen Kovektor $\omega \in V^*$ können wir bezüglich der dualen Basis ausdrücken als

$$\omega = \omega_i \varepsilon^i, \tag{11.1}$$

wobei die Komponenten durch $\omega_i = \omega(e_i)$ bestimmt sind, und entsprechend ist die Wirkung von ω auf einen Vektor $v = v^j e_j$

$$\omega(v) = \omega_i v^i. \tag{11.2}$$

Notation: Wir schreiben Basis-Kovektoren stets mit oberen Indizes und Komponenten eines Kovektors mit unteren Indizes.

Seien V und W Vektorräume und $L: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wir definieren eine lineare Abbildung $L^*: W^* \rightarrow V^*$, die **duale Abbildung** oder **Transponierte von L** genannt wird, durch

$$(L^*\omega)(v) = \omega(Lv) \quad \text{für } \omega \in W^*, v \in V.$$

Die duale Abbildung erfüllt die folgenden Eigenschaften.

- (1) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.
- (2) $(\text{Id}_V)^*: V^* \rightarrow V^*$ ist die Identitätsabbildung von V^* .

Für einen Vektorraum V gibt es auch einen **zweiten Dualraum** $V^{**} = (V^*)^*$. Für jeden Vektorraum V existiert eine natürliche, basisunabhängige Abbildung $\xi: V \rightarrow V^{**}$, die wie folgt definiert ist. Für jeden Vektor $v \in V$ definieren wir ein lineares Funktional $\xi(v): V^* \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\xi(v)(\omega) = \omega(v) \quad \text{für } \omega \in V^*.$$

Vorschlag 11.2. Für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V ist die Abbildung $\xi: V \rightarrow V^{**}$ ein Isomorphismus.

Proof. Da $\dim V = \dim V^{**}$, genügt es zu zeigen, dass ξ injektiv ist. Sei $v \in V$ ein von Null verschiedener Vektor. Wir ergänzen v zu einer Basis $(v = E_1, \dots, E_n)$ von V , und bezeichnen die duale Basis von V^* mit $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Dann gilt $\xi(v) \neq 0$, denn

$$\xi(v)(\varepsilon^1) = \varepsilon^1(v) = \varepsilon^1(E_1) = 1. \quad \square$$

Der vorstehende Satz zeigt, dass wir für endlichdimensionales V den Raum V^{**} eindeutig mit V selbst identifizieren können, da die Abbildung ξ kanonisch definiert ist, ohne Bezug auf eine Basis. Es ist wichtig zu bemerken, dass V^* zwar ebenfalls isomorph zu V ist (aus dem einfachen Grund, dass je zwei endlichdimensionale Vektorräume gleicher Dimension isomorph sind), es aber keinen *kanonischen* Isomorphismus $V \cong V^*$ gibt.

11.1 Tangential-Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten

Sei nun M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ definieren wir den **Kotangentenraum in p** , bezeichnet mit T_p^*M , als den Dualraum von T_pM

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Elemente von T_p^*M heißen **Tangential-Kovektoren in p** oder einfach **Kovektoren in p** .

Sei (U, x^i) eine Koordinatenkarte, und die Koordinatenbasis $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ erzeugt eine duale Basis von T_p^*M , die wir mit $(\lambda^i|_p)$ bezeichnen. Jeder Kovektor $\omega \in T_p^*M$ lässt sich somit eindeutig schreiben als $\omega = \omega_i \lambda^i|_p$, wobei

$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right).$$

Versuchen wir zu verstehen, wie die Kovektoren unter einem Koordinatenwechsel aussehen. Sei $(\tilde{x}^j)$ ein weiteres System glatter Koordinaten, dessen Definitionsbereich p enthält, und sei $(\tilde{\lambda}^j|_p)$ die Basis von T_p^*M , die dual zu $(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}|_p)$ ist. Wir erinnern daran, dass sich die Koordinatenvektorfelder wie folgt transformieren:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p. \quad (11.3)$$

Schreibt man ω in beiden Systemen als $\omega = \omega_i \lambda^i|_p = \tilde{\omega}_j \tilde{\lambda}^j|_p$, so kann man mit (11.3) die Komponenten ω_i durch $\tilde{\omega}_j$ ausdrücken:

$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \omega\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \tilde{\omega}_j. \quad (11.4)$$

Somit sind die Komponenten eines Vektors, d. h. die n -Tupel $(v^1, \dots, v^n)$ und $(\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$, die zwei verschiedenen Koordinatensystemen (x^i) und $(\tilde{x}^j)$ zugeordnet sind, durch das Transformationsgesetz

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) v^i$$

verbunden, und ein Kovektor transformiert sich gemäß der folgenden, leicht abweichenden Regel:

$$\omega_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p) \tilde{\omega}_j. \quad (11.7)$$

11.2 Kovektorfelder oder 1-Formen

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M wird die disjunkte Vereinigung

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

das **Kotangentenbündel von M** genannt. Es besitzt eine natürliche Projektionsabbildung $\pi: T^*M \rightarrow M$, die $\omega \in T_p^*M$ auf $p \in M$ abbildet. Wie oben bezeichnen wir für gegebene glatte lokale Koordinaten (x^i) auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und für jedes $p \in U$ die zu $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$ duale Basis von T_p^*M mit $(\lambda^i|_p)$. Dies definiert n Abbildungen $\lambda^1, \dots, \lambda^n: U \rightarrow T^*M$, die **Koordinaten-Kovektorfelder** genannt werden. Wie im Fall des Tangentialbündels (Satz 4.8) besagt das nächste Ergebnis, dass das Kotangentenbündel ebenfalls eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer von M geerbten glatten Struktur ist.

Satz 11.3. Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Das Kotangentialbündel T^*M besitzt eine eindeutige Topologie und glatte Struktur, die es zu einer glatten $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit machen.

Proof. Wir überlassen den Beweis als Übungsaufgabe. □

Wie im Fall des Tangentialbündels liefern glatte lokale Koordinaten für M glatte lokale Koordinaten für das Kotangentialbündel. Sind (x^i) glatte Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist die Abbildung von $\pi^{-1}(U)$ nach $\mathbb{R}^{2n}$, gegeben durch

$$\xi_i \lambda^i|_p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), \xi_1, \dots, \xi_n),$$

eine glatte Koordinatenkarte für T^*M . Wir nennen (x^i, ξ_i) die **natürlichen Koordinaten für T^*M** , die zu (x^i) gehören.

Wie auch bei Vektorfeldern haben wir die folgende Definition.

Definition 11.4. Ein **Kovektorfeld** oder eine **(differentielle) 1-Form** ist eine stetige Abbildung $\omega : M \rightarrow T^*M$ mit

$$\pi \circ \omega = \text{id}_M.$$

Somit gilt für jedes $p \in M$: $\omega_p \in T_p^*M$.

In beliebigen glatten lokalen Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ lässt sich ein Kovektorfeld ω mittels der Koordinaten-Kovektorfelder (λ^i) schreiben als $\omega = \omega_i \lambda^i$ für n Funktionen $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, die **Komponentenfunktionen von ω** genannt werden. Sie sind charakterisiert durch

$$\omega_i(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right).$$

Ist ω ein Kovektorfeld und X ein Vektorfeld auf M , so können wir eine Funktion $\omega(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$ bilden durch

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \quad p \in M.$$

Schreibt man $\omega = \omega_i \lambda^i$ und $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ in lokalen Koordinaten, so hat $\omega(X)$ die lokale Koordinatendarstellung $\omega(X) = \omega_i X^i$.

Wie im Fall der Vektorfelder gibt es mehrere Möglichkeiten, die Glattheit eines Kovektorfeldes zu prüfen.

Vorschlag 11.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $\omega : M \rightarrow T^*M$ ein Kovektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. ω ist glatt.
2. In jeder glatten Koordinatenkarte sind die Komponentenfunktionen von ω glatt.
3. Für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist die Funktion $\omega(X)$ glatt auf M .
4. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jedes glatte Vektorfeld X auf U ist die Funktion $\omega(X) : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt auf U .

Wir bezeichnen den reellen Vektorraum aller glatten Kovektorfelder auf M mit $\mathfrak{X}^*M$ oder $\Omega^1(M)$. Für $f \in C^\infty(M)$ ist das Kovektorfeld $f\omega$ definiert als

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p. \tag{11.5}$$

11.3 Das Differential einer Funktion

Wir erinnern daran, dass der Gradient einer glatten reellwertigen Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ als das Vektorfeld definiert ist, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen von f sind:

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Obwohl die partiellen Ableitungen einer glatten Funktion nicht koordinatenunabhängig als Komponenten eines Vektorfeldes interpretiert werden können, stellt sich heraus, dass sie als Komponenten eines Kovektorfeldes interpretiert werden können. Dies ist die wichtigste Anwendung von Kovektorfeldern.

Definition 11.6. Sei f eine glatte reellwertige Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Wir definieren ein Kovektorfeld df , das **Differential von f** genannt wird, durch

$$df_p(v) = v f \quad \text{für } v \in T_p M.$$

Vorschlag 11.7. Das Differential einer glatten Funktion ist ein glattes Kovektorfeld.

Proof. An jedem Punkt $p \in M$ hängt $df_p(v)$ offensichtlich linear von v ab, sodass df_p tatsächlich ein Kovektor in p ist. Um die Glattheit von df zu zeigen, verwenden wir Satz 11.5 (3): Für jedes glatte Vektorfeld X auf M ist die Funktion $df(X)$ glatt, da sie gleich Xf ist. $\square$

Berechnen wir nun df in Koordinaten, d. h. bestimmen wir seine Koordinatendarstellung. Seien (x^i) glatte Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, und sei (λ^i) die zugehörige duale Koordinatenbasis auf U . Wir schreiben df in Koordinaten als $df_p = A_i(p) \lambda^i|_p$ für gewisse Funktionen $A_i: U \rightarrow \mathbb{R}$; dann folgt aus der Definition von df

$$A_i(p) = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Dies ergibt die folgende Formel für die Koordinatendarstellung von df :

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \lambda^i \Big|_p. \quad (11.6)$$

Die Komponentenfunktionen von df in einer beliebigen glatten Koordinatenkarte sind also die partiellen Ableitungen von f bezüglich dieser Koordinaten. Somit ist das Differential von f in Koordinaten analog zum Gradienten von f in lokalen Koordinaten, aber df ist unabhängig von jedem Koordinatensystem sinnvoll definiert.

Wenden wir (11.6) auf den Spezialfall an, in dem f eine der Koordinatenfunktionen $x^j: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist, so erhalten wir

$$dx^j|_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) \lambda^i|_p = \delta_i^j \lambda^i|_p = \lambda^j|_p.$$

Mit anderen Worten, das Koordinaten-Kovektorfeld λ^j ist nichts anderes als das Differential dx^j . Daher lässt sich die Formel (11.6) für df_p umschreiben als

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p,$$

oder als Gleichung zwischen Kovektorfeldern statt Kovektoren:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (11.11)$$

Von nun an verzichten wir auf die Notation λ^i für das Koordinaten-Korahmenfeld und verwenden stattdessen dx^i .

Beispiel 11.8. Ist $f(x, y) = x^2 y \cos x$ auf $\mathbb{R}^2$, so ist df gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial (x^2 y \cos x)}{\partial x} dx + \frac{\partial (x^2 y \cos x)}{\partial y} dy \\ &= (2xy \cos x - x^2 y \sin x) dx + x^2 \cos x dy. \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass wir für eine glatte reellwertige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ nun zwei verschiedene Definitionen für das Differential von f in einem Punkt $p \in M$ haben. Zuvor hatten wir df_p als lineare Abbildung von $T_p M$ nach $T_{f(p)} \mathbb{R}$ definiert. Jetzt haben wir df_p als Kovektor in p definiert, also als lineare Abbildung von $T_p M$ nach $\mathbb{R}$. Dies sind tatsächlich dieselben Objekte, wenn man die kanonische Identifikation von $\mathbb{R}$ mit $T_{f(p)} \mathbb{R}$ berücksichtigt; eine einfache Möglichkeit, dies einzusehen, besteht darin festzustellen, dass beide in Koordinaten durch die Zeilenmatrix dargestellt werden, deren Komponenten die partiellen Ableitungen von f sind.

Vorschlag 11.9 (Eigenschaften des Differentials). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $f, g \in C^\infty(M)$.

- (a) Sind a und b Konstanten, so gilt $d(af + bg) = a df + b dg$.
- (b) $d(fg) = f dg + g df$.
- (c) $d(f/g) = (g df - f dg)/g^2$ auf der Menge, auf der $g \neq 0$.
- (d) Ist f konstant, so gilt $df = 0$.

Vorschlag 11.10 (Funktionen mit verschwindendem Differential). Ist f eine glatte reellwertige Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , so gilt $df = 0$ genau dann, wenn f auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant ist.

Proof. Es genügt anzunehmen, dass M zusammenhängend ist, und zu zeigen, dass $df = 0$ genau dann gilt, wenn f konstant ist. Eine Richtung ist unmittelbar klar: Ist f konstant, so gilt $df = 0$. Umgekehrt sei $df = 0$, sei $p \in M$ und sei $\mathcal{C} = \{q \in M : f(q) = f(p)\}$. Ist q ein beliebiger Punkt in $\mathcal{C}$, so sei U eine glatte Koordinatenkugel mit Mittelpunkt q . Aus (11.11) folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv 0$ in U für jedes i , also ist f nach elementarer Analysis konstant auf U . Dies zeigt, dass $\mathcal{C}$ offen ist, und da $\mathcal{C}$ nach Stetigkeit abgeschlossen ist, muss $\mathcal{C}$ ganz M sein. Somit ist f überall gleich der Konstanten $f(p)$. $\square$

11.4 Rückzug von Kovektorfeldern

Wie wir gesehen haben, liefert eine glatte Abbildung eine lineare Abbildung auf Tangentialvektoren, das sogenannte Differential. Durch Dualisierung ergibt sich eine lineare Abbildung auf Kovektoren in der entgegengesetzten Richtung.

Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und sei $p \in M$ beliebig. Das Differential $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ liefert eine duale lineare Abbildung

$$dF_p^*: T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M,$$

die **(punktweiser) Rückzug durch F in p** oder **Kotangentialabbildung von F** genannt wird. Entfaltet man die Definitionen, so sieht man, dass dF_p^* charakterisiert ist durch

$$dF_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_p(v)), \quad \text{für } \omega \in T_{F(p)}^* N, v \in T_p M.$$

Nun kommt der wichtige Teil. Wir erinnern daran, dass wir bei der Diskussion von Vektorfeldern betont haben, dass Vorwärtstransporte von Vektorfeldern unter glatten Abbildungen nur in den Spezialfällen von Diffeomorphismen oder Lie-Gruppen-Homomorphismen definiert sind (man erinnere sich an den Begriff der F -Verwandtschaft). **Das Überraschende an Kovektoren ist, dass sich Kovektorfelder immer zurückziehen lassen.**

Definition 11.11. Gegeben eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ und ein Kovektorfeld ω auf N , definieren wir ein Kovektorfeld $F^*\omega$ auf M , den sogenannten **Rückzug von ω durch F** , durch

$$(F^*\omega)_p = dF_p^*(\omega_{F(p)}). \quad (11.7)$$

Die Wirkung auf einen Vektor $v \in T_p M$ ist gegeben durch

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}(dF_p(v)).$$

Im Gegensatz zum Fall der Vektorfelder gibt es hier keine Mehrdeutigkeit bezüglich des Punktes, von dem zurückgezogen wird: Der Wert von $F^*\omega$ in p ist der Rückzug von ω in $F(p)$.

Wir beweisen nun zwei wichtige Eigenschaften des Rückzugs.

Vorschlag 11.12. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Sei u eine stetige reellwertige Funktion auf N und ω ein Kovektorfeld auf N . Dann gilt

$$F^*(u\omega) = (u \circ F)F^*\omega. \quad (11.8)$$

Ist u zusätzlich glatt, so gilt

$$F^*du = d(u \circ F). \quad (11.9)$$

Proof. Zum Beweis von (11.8) berechnen wir

$$\begin{aligned} (F^*(u\omega))_p &= dF_p^*((u\omega)_{F(p)}) \\ &= dF_p^*(u(F(p))\omega_{F(p)}) \\ &= u(F(p))dF_p^*(\omega_{F(p)}) && \text{(nach Linearität von } dF_p^*) \\ &= u(F(p))(F^*\omega)_p && \text{(nach Definition)} \\ &= ((u \circ F)F^*\omega)_p. \end{aligned}$$

Für (11.9) sei $v \in T_p M$ beliebig, und wir berechnen

$$\begin{aligned} (F^*du)_p(v) &= (dF_p^*(du_{F(p)}))(v) && \text{(nach (11.7))} \\ &= du_{F(p)}(dF_p(v)) && \text{(nach Definition von } dF_p^*) \\ &= dF_p(v)u && \text{(nach Definition von } du) \\ &= v(u \circ F) && \text{(nach Definition von } dF_p) \\ &= d(u \circ F)_p(v) && \text{(nach Definition von } d(u \circ F)). \end{aligned}$$

□

Vorschlag 11.13. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und sei ω ein Kovektorfeld auf N . Dann ist $F^*\omega$ ein Kovektorfeld auf M . Ist ω glatt, so ist auch $F^*\omega$ glatt.

Proof. Sei $p \in M$ beliebig, und wähle glatte Koordinaten (y^j) für N in einer Umgebung V von $F(p)$. Sei $U = F^{-1}(V)$, was eine Umgebung von p ist. Schreiben wir ω in Koordinaten als $\omega = \omega_j dy^j$ für stetige Funktionen ω_j auf V und verwenden Satz 11.12 zweimal, so ergibt sich die folgende Berechnung in U :

$$F^*\omega = F^*(\omega_j dy^j) = (\omega_j \circ F) F^* dy^j = (\omega_j \circ F) d(y^j \circ F). \quad (11.10)$$

Dieser Ausdruck ist stetig und glatt, falls ω glatt ist. $\square$

Beispiel 11.14. Sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung, gegeben durch

$$(u, v) = F(x, y, z) = (x^2 y, y \sin z),$$

und sei $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)$ das Kovektorfeld

$$\omega = u dv + v du.$$

Gemäß (11.10) ist der Rückzug $F^*\omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (u \circ F) d(v \circ F) + (v \circ F) d(u \circ F) \\ &= (x^2 y) d(y \sin z) + (y \sin z) d(x^2 y) \\ &= x^2 y (\sin z dy + y \cos z dz) + y \sin z (2xy dx + x^2 dy) \\ &= 2xy^2 \sin z dx + 2x^2 y \sin z dy + x^2 y^2 \cos z dz. \end{aligned}$$

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit und $\iota: S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Ist ω ein beliebiges glattes Kovektorfeld auf M , so liefert der Rückzug durch ι ein glattes Kovektorfeld $\iota^*\omega$ auf S . Um zu sehen, was dies bedeutet, sei $v \in T_p S$ beliebig, und wir berechnen

$$(\iota^*\omega)_p(v) = \omega_p(d\iota_p(v)) = \omega_p(v),$$

da $d\iota_p: T_p S \rightarrow T_p M$ unter unserer üblichen Identifikation von $T_p S$ mit einem Unterraum von $T_p M$ lediglich die Inklusionsabbildung ist. Somit ist $\iota^*\omega$ einfach die Einschränkung von ω auf Vektoren, die tangential an S sind. Aus diesem Grund wird $\iota^*\omega$ oft die **Einschränkung von ω auf S** genannt.

11.5 Lie-Ableitungen von 1-Formen

Die Lie-Ableitung lässt sich auf Kovektorfelder erweitern. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, V ein glattes Vektorfeld auf M und θ sein Fluss. Für jedes $p \in M$ ist θ_t für hinreichend kleines t ein Diffeomorphismus von einer Umgebung von p auf eine Umgebung von $\theta_t(p)$, sodass $d(\theta_t)_p^*$ Kovektoren in $\theta_t(p)$ auf solche in p zurückzieht, gemäß der Formel

$$d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)})(v) = \omega_{\theta_t(p)}(d(\theta_t)_p(v_1)).$$

Man beachte, dass $d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)})$ gerade der Wert des zurückgezogenen Kovektorfeldes $\theta_t^*\omega$ in p ist.

Definition 11.15. Gegeben ein glattes Kovektorfeld ω auf M , definieren wir die **Lie-Ableitung von ω bezüglich V** , bezeichnet mit $\mathcal{L}_V \omega$, durch

$$(\mathcal{L}_V \omega)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^* \omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p}{t}, \quad (11.11)$$

sofern die Ableitung existiert.

Wie im Fall der Vektorfelder gilt:

Vorschlag 11.16. Mit M , V und ω wie oben existiert die Ableitung in (11.11) für jedes $p \in M$ und definiert $\mathcal{L}_V \omega$ als ein glattes Kovektorfeld auf M .

Lemma 11.17. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Sei f eine glatte reellwertige Funktion auf M und ω ein glattes Kovektorfeld auf M . Dann gilt:

(a) $\mathcal{L}_V(f\omega) = (\mathcal{L}_V f)\omega + f\mathcal{L}_V\omega$.

(b) Ist X ein glattes Vektorfeld, so gilt

$$\mathcal{L}_V(\omega(X)) = (\mathcal{L}_V\omega)(X) + \omega(\mathcal{L}_V X) \quad (11.12)$$

Eine Folgerung aus diesem Satz ist die folgende Formel, die die Lie-Ableitung eines beliebigen glatten Kovektorfeldes durch Lie-Klammern und gewöhnliche Richtungsableitungen von Funktionen ausdrückt, was es uns erlaubt, Lie-Ableitungen zu berechnen, ohne zuvor den Fluss zu bestimmen.

Folge 11.18. Es gilt Folgendes.

1. Ist V ein glattes Vektorfeld und ω ein glattes Kovektorfeld, so gilt für jedes glatte Vektorfeld X

$$(\mathcal{L}_V\omega)(X) = V(\omega(X)) - \omega([V, X]). \quad (11.13)$$

2. Ist $f \in C^\infty(M)$, so gilt $\mathcal{L}_V(df) = d(\mathcal{L}_V f)$.

Beweis. Wir beweisen nur (2). Mit (11.13) berechnen wir für beliebiges $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V df)(X) &= V(df(X)) - df([V, X]) = VXf - [V, X]f \\ &= VXf - (VXf - XVf) = XVf \\ &= d(Vf)(X) = d(\mathcal{L}_V f)(X). \end{aligned}$$

□

12. Tensoren

Nachdem wir den Begriff der Vektorfelder und Kovektorfelder ausführlich untersucht und die Techniken zu ihrer Untersuchung verstanden haben, beginnen wir nun mit dem Studium von Tensoren, die eine einheitliche Möglichkeit bieten, Tangential- und Kotangentialbündel gemeinsam zu behandeln. Wir beginnen mit Tensoren auf einem Vektorraum; diese sind multilineare Verallgemeinerungen von Kovektoren. Ein Kovektor ist der Spezialfall eines Tensors vom Rang eins.

Viele geometrische Strukturen, die uns im Studium der Differentialgeometrie begegnen werden, sind Tensoren: zum Beispiel Riemannsche Metriken, fast komplexe Strukturen, symplektische Strukturen, Differentialformen usw.

12.1 Multilineare Algebra

Wir erinnern daran, dass Kovektoren reellwertige lineare Funktionen auf einem Vektorraum sind. Ein Tensor ist eine Verallgemeinerung davon in dem Sinne, dass Tensoren reellwertige *multilineare* Funktionen in einer oder mehreren Variablen sind.

Seien $V_1, \dots, V_k$ und W Vektorräume. Eine Abbildung

$$F: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

heißt *multilinear*, wenn sie in jeder Variablen linear ist, d.h. für jedes i gilt

$$F(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_k) = aF(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + bF(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

Auf diese Weise ist eine multilineare Funktion in einer Variablen einfach eine lineare Funktion, und eine multilineare Funktion in zwei Variablen wird im Allgemeinen *bilinear* genannt. Wir schreiben $L(V_1, \dots, V_k; W)$ für die Menge aller multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \dots \times V_k$ nach W . Sie ist ein Vektorraum bezüglich der üblichen Operationen der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} (F + F')(v_1, \dots, v_k) &= F(v_1, \dots, v_k) + F'(v_1, \dots, v_k), \\ (aF)(v_1, \dots, v_k) &= a(F(v_1, \dots, v_k)). \end{aligned}$$

Zum Beispiel sind das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$, das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ und die Determinante alles Beispiele für multilineare Abbildungen. Betrachten wir nun ein anderes, aber sehr wichtiges Beispiel.

Beispiel 12.1 (Tensorprodukt von Kovektoren). Sei V ein Vektorraum, und seien $\omega, \eta \in V^*$. Definiere eine Funktion $\omega \otimes \eta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\omega \otimes \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2),$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite die gewöhnliche Multiplikation reeller Zahlen ist. Die Linearität von ω und η garantiert, dass $\omega \otimes \eta$ eine bilineare Funktion in v_1 und v_2 ist. Wenn (e^1, e^2) die Standard-Dualbasis von $(\mathbb{R}^2)^*$ bezeichnet, dann ist $e^1 \otimes e^2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die bilineare Funktion

$$e^1 \otimes e^2((w, x), (y, z)) = wz.$$

Wir können das letzte Beispiel auf beliebige reellwertige multilineare Funktionen wie folgt verallgemeinern: Seien $V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l$ reelle Vektorräume, und seien $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ und $G \in L(W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$. Definiere eine Funktion

$$F \otimes G: V_1 \times \dots \times V_k \times W_1 \times \dots \times W_l \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = F(v_1, \dots, v_k)G(w_1, \dots, w_l). \quad (12.1)$$

Aus der Multilinearität von F und G folgt, dass $F \otimes G(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$ von jedem Argument v_i bzw. w_j separat linear abhängt. Daher ist $F \otimes G$ ein Element von $L(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$ und heißt das **Tensorprodukt von F und G** . Man kann zeigen, dass

$$(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H).$$

Daher können wir Tensorprodukte von drei oder mehr multilinearen Funktionen ohne Mehrdeutigkeit ohne Klammern schreiben. Wenn $F_1, \dots, F_l$ multilineare Funktionen sind, die jeweils von $k_1, \dots, k_l$ Variablen abhängen, dann ist ihr Tensorprodukt $F_1 \otimes \dots \otimes F_l$ eine multilineare Funktion in $k = k_1 + \dots + k_l$ Variablen, deren Wirkung auf k Vektoren dadurch gegeben ist, dass die ersten k_1 Vektoren in F_1 , die nächsten k_2 Vektoren in F_2 usw. eingesetzt werden und die Ergebnisse miteinander multipliziert werden.

Wenn $\omega^j \in V_j^*$ für $j = 1, \dots, k$, dann ist $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ die multilineare Funktion, die gegeben ist durch

$$\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \omega^1(v_1) \dots \omega^k(v_k). \quad (12.1)$$

Die nächste Proposition zeigt, dass man eine Basis für jeden Raum multilinearer Funktionen bilden kann, indem man alle möglichen Tensorprodukte von Basis-Kovektoren nimmt.

Vorschlag 12.2 (Eine Basis für den Raum multilinearer Funktionen). Seien $V_1, \dots, V_k$ reelle Vektorräume der Dimensionen $n_1, \dots, n_k$. Für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ sei $(E_1^{(j)}, \dots, E_{n_j}^{(j)})$ eine Basis von V_j , und sei $(\varepsilon_{(j)}^1, \dots, \varepsilon_{(j)}^{n_j})$ die entsprechende duale Basis von V_j^* . Dann ist die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k \right\}$$

eine Basis von $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$, der daher Dimension $n_1 \dots n_k$ hat.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist und $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ aufspannt. Sei $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ beliebig. Für jedes geordnete k -Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ von ganzen Zahlen mit $1 \leq i_j \leq n_j$ definieren wir eine Zahl $F_{i_1 \dots i_k}$ durch

$$F_{i_1 \dots i_k} = F(E_{i_1}^{(1)}, \dots, E_{i_k}^{(k)}). \quad (12.2)$$

Wenn wir zeigen, dass

$$F = F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}$$

gilt, dann folgt daraus, dass $\mathcal{B}$ den Raum $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ aufspannt. Für ein beliebiges k -Tupel von Vektoren $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ schreiben wir $v_1 = v_1^{i_1} E_{i_1}^{(1)}, \dots, v_k = v_k^{i_k} E_{i_k}^{(k)}$ und berechnen

$$\begin{aligned} F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}(v_1, \dots, v_k) &= F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1}(v_1) \dots \varepsilon_{(k)}^{i_k}(v_k) \\ &= F_{i_1 \dots i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k}, \end{aligned}$$

während $F(v_1, \dots, v_k)$ aufgrund der Multilinearität gleich demselben Ausdruck ist. Dies beweist die Behauptung.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, nehmen wir an, dass eine lineare Kombination gleich null ist:

$$F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} = 0.$$

Wenden wir diese auf ein beliebiges geordnetes k -Tupel von Basisvektoren $(E_{j_1}^{(1)}, \dots, E_{j_k}^{(k)})$ an. Durch dieselbe Rechnung wie oben folgt, dass jeder Koeffizient $F_{j_1 \dots j_k}$ gleich null ist. Somit ist die einzige lineare Kombination von Elementen aus $\mathcal{B}$, die null ergibt, die triviale. $\square$

Dieser Beweis zeigt übrigens, dass die Komponenten $F_{i_1 \dots i_k}$ einer multilineareren Funktion F bezüglich der Basiselemente in $\mathcal{B}$ durch (12.2) gegeben sind. Daher ist F vollständig durch seine Wirkung auf alle möglichen Folgen von Basisvektoren bestimmt.

12.2 Kovariante und kontravariante Tensoren

Definition 12.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wenn k eine positive ganze Zahl ist, dann ist ein *kovarianter k -Tensor auf V* ein Element des k -fachen Tensorprodukts $V^* \otimes \dots \otimes V^*$, das man auch als reellwertige multilineare Funktion in k Elementen von V auffassen kann:

$$\alpha: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ Kopien}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Zahl k heißt der *Rang von α* .

Somit nimmt ein kovarianter Tensor k Vektoren als Argumente und gibt eine reelle Zahl aus. Ein 0-Tensor ist per Konvention einfach eine reelle Zahl. Wir bezeichnen den Vektorraum aller kovarianten k -Tensoren auf V mit der Notation

$$T^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ Kopien}}.$$

Zum Beispiel ist ein **Kovektor** ein kovarianter Tensor vom Rang 1. Ein Skalarprodukt ist ein kovarianter Tensor vom Rang 2.

Definition 12.4. Für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum V definieren wir den Raum der *kontravarianten Tensoren auf V vom Rang k* als den Vektorraum

$$T^k(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ Kopien}}.$$

Elemente von $T^k(V)$ kann man auch auffassen als

$$T^k(V) \cong \left\{ \text{multilineare Funktionen } \alpha: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ Kopien}} \rightarrow \mathbb{R} \right\}.$$

Durch Kombination der beiden vorherigen Definitionen erhalten wir Folgendes:

Definition 12.5. Für beliebige nichtnegative ganze Zahlen k, l definieren wir den Raum der *gemischten Tensoren auf V vom Typ (k, l)* als

$$T^{(k,l)}(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ Kopien}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ Kopien}}.$$

Somit gilt in unserer Notation zum Beispiel

$$T^{(0,0)}(V) = T^0(V^*) = T^0(V) = \mathbb{R},$$

$$T^{(0,1)}(V) = T^1(V^*) = V^*,$$

$$T^{(1,0)}(V) = T^1(V) = V,$$

$$T^{(0,k)}(V) = T^k(V^*),$$

$$T^{(k,0)}(V) = T^k(V).$$

Bemerkung 12.6. Die Notation $T^{(k,l)}(V)$ ist nicht universell. Eine andere gebräuchliche Notation ist $T_l^k(V)$. In einer weiteren Notation werden die Rollen von k und l vertauscht; daher muss man beim Lesen anderer Quellen vorsichtig sein.

Eine Folgerung aus Proposition 12.2 ist die folgende Aussage über Basen des Raumes der Tensoren.

Folge 12.7. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis (E_i) und sei (ε^j) die duale Basis von V^* . Dann bilden die folgenden Mengen Basen der Tensorräume über V :

$$\{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\} \quad \text{für } T^k(V^*);$$

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\} \quad \text{für } T^k(V);$$

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l} : 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n\} \quad \text{für } T^{(k,l)}(V).$$

Daher gilt

$$\dim T^k(V^*) = \dim T^k(V) = n^k \quad \text{und} \quad \dim T^{(k,l)}(V) = n^{k+l}.$$

Somit können wir bei gegebener Basis von V und der zugehörigen dualen Basis die Darstellung jedes Elements $A \in T^k(V^*)$ explizit angeben. Es gilt

$$A = A_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k},$$

wobei die n^k Koeffizienten $A_{i_1 \dots i_k}$ bestimmt sind durch

$$A_{i_1 \dots i_k} = A(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

12.3 Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir ahmen unsere Beschreibungen des Tangentialbündels und des Kotangentialbündels nach, um zunächst das **Bündel der kovarianten k -Tensoren auf M** zu definieren durch

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^* M).$$

Analog definieren wir das **Bündel der kontravarianten k -Tensoren** durch

$$T^k T M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M),$$

und das **Bündel der gemischten Tensoren vom Typ (k, l)** durch

$$T^{(k,l)} T M = \coprod_{p \in M} T^{(k,l)}(T_p M).$$

Unmittelbar sehen wir beispielsweise, dass

$$T^{(0,0)} T M = T^0 T^* M = T^0 T M = M \times \mathbb{R},$$

$$T^{(0,1)} T M = T^1 T^* M = T^* M,$$

$$T^{(1,0)} T M = T^1 T M = T M,$$

$$T^{(0,k)} T M = T^k T^* M,$$

$$T^{(k,0)} T M = T^k T M.$$

Wie im Fall des Tangential- und Kotangentialbündels kann man zeigen, dass die obigen Räume, auch **Tensorbündel über M** genannt, glatte Mannigfaltigkeiten mit einer von M geerbten glatten Struktur sind und außerdem mit einer Projektionsabbildung $\pi : T^{(k,l)}(M) \rightarrow M$ ausgestattet sind. Daher können wir auch die Beschreibung von Vektorfeldern und Kovektorfeldern nachahmen, um die folgende Definition zu geben.

Definition 12.8. Ein (k, l) -Tensorfeld α auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine stetige Abbildung

$$\alpha : M \rightarrow T^{(k,l)}(M)$$

derart, dass

$$\pi \circ \alpha = id_M.$$

Das Tensorfeld α heißt **glatt**, wenn es eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist.

Wir sehen, dass kontravariante 1-Tensorfelder dasselbe sind wie Vektorfelder, und kovariante 1-Tensorfelder Kovektorfelder sind; ein 0-Tensorfeld ist dasselbe wie eine stetige reellwertige Funktion.

Notation: Wir bezeichnen den Raum aller (k, l) -Tensorfelder mit $\Gamma(T^{(k,l)} T M)$. Dies sind unendlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ und Moduln über $C^\infty(M)$. In beliebigen glatten lokalen Koordinaten (x^i) können Schnitte dieser Bündel unter Verwendung der Summenkonvention geschrieben werden als

$$A = \begin{cases} A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & A \in \Gamma(T^k T^* M); \\ A^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, & A \in \Gamma(T^k T M); \\ A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}, & A \in \Gamma(T^{(k,l)} T M). \end{cases}$$

Die Funktionen $A_{i_1 \dots i_k}$, $A^{i_1 \dots i_k}$ oder $A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ heißen die **Komponentenfunktionen von A** in den gewählten Koordinaten. Der Kürze halber bezeichnen wir den Raum aller glatten kovarianten k -Tensorfelder mit

$$\mathcal{T}^k(M) = \Gamma(T^k T^* M).$$

Die nächste Proposition ist analog zu Proposition 8.8, welche die Glattheitskriterien für Vektorfelder angab, beziehungsweise zu Proposition 11.5 für Kovektorfelder. Wir formulieren sie nur für kovariante Tensoren, aber das Ergebnis ist für andere Typen von Tensoren ähnlich.

Vorschlag 12.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $A: M \rightarrow T^k T^* M$ ein Tensorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (1) A ist glatt.
- (2) In jeder glatten Koordinatenkarte sind die Komponentenfunktionen von A glatt.
- (3) Wenn $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist die Funktion $A(X_1, \dots, X_k): M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$A(X_1, \dots, X_k)(p) = A_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p),$$

glatt.

- (4) Wann immer $X_1, \dots, X_k$ glatte Vektorfelder sind, die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert sind, ist die Funktion $A(X_1, \dots, X_k)$ glatt auf U .

Damit haben wir die Glattheit eines Tensorfeldes wiederum darauf zurückgeführt, entweder seine Komponentenfunktionen zu betrachten oder aus A eine Funktion zu erzeugen, indem man k Vektorfelder in A einsetzt und anschließend die Glattheit der entstehenden Funktion untersucht. Ähnlich wie im Fall von Vektorfeldern gilt das Folgende:

Vorschlag 12.10. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \in \mathcal{T}^k(M)$, $B \in \mathcal{T}^l(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann sind fA und $A \otimes B$ ebenfalls glatte Tensorfelder, deren Komponenten in jeder glatten lokalen Koordinatenkarte gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (fA)_{i_1 \dots i_k} &= f A_{i_1 \dots i_k}, \\ (A \otimes B)_{i_1 \dots i_{k+l}} &= A_{i_1 \dots i_k} B_{i_{k+1} \dots i_{k+l}}. \end{aligned}$$

Nun stellt sich eine Frage: Wenn wir eine Abbildung sehen, die k Vektorfelder als Argumente nimmt und uns eine glatte Funktion liefert, wie können wir garantieren, dass sie tatsächlich ein glattes kovariantes Tensorfeld vom Rang k ist? Zunächst bemerken wir, dass jeder kovariante Tensor A vom Rang k eine Abbildung

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ Kopien}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

induziert, die multilinear über $\mathbb{R}$ ist. Tatsächlich gilt aber mehr: Sie ist *multilinear über* $C^\infty(M)$. Das bedeutet, dass für $f, f' \in C^\infty(M)$ und $X_i, X'_i \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$A(X_1, \dots, fX_i + f'X'_i, \dots, X_k) = fA(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + f'A(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_k).$$

Diese Eigenschaft erweist sich als charakteristisch für glatte Tensorfelder, wie das nächste Lemma zeigt, das wir ohne Beweis angeben.

Lemma 12.11 (Charakterisierungslemma für Tensoren). Eine Abbildung

$$A: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ Kopien}} \longrightarrow C^\infty(M), \quad (12.3)$$

wird genau dann von einem glatten kovarianten k -Tensorfeld wie oben induziert, wenn sie multilinear über $C^\infty(M)$ ist.

Ein **symmetrisches Tensorfeld** auf einer Mannigfaltigkeit ist ein kovariantes Tensorfeld, dessen Wert an jedem Punkt ein symmetrischer Tensor ist, d.h. der Wert des Tensors ändert sich nicht, wenn wir die Position der Vektoren in seinem Argument vertauschen. Das symmetrische Produkt von zwei oder mehr Tensorfeldern wird punktweise definiert, genau wie das Tensorprodukt. Wenn zum Beispiel A und B glatte Kovektorfelder sind, dann ist ihr symmetrisches Produkt das glatte 2-Tensorfeld AB , das gegeben ist durch

$$AB = \frac{1}{2}(A \otimes B + B \otimes A).$$

Wir erwähnen noch zwei weitere Beispiele von Tensoren.

Beispiel 12.12 (Riemannsche Metriken). Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik g auf M ordnet jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt g_p auf $T_p M$ zu, und somit erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

die außerdem symmetrisch und positiv definit ist. Eine Riemannsche Metrik heißt *glatt*, wenn die Funktion $M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto g(X(p), Y(p))$ für jedes Paar von Vektorfeldern $X, Y \in \Xi(M)$ glatt ist. Somit ist g ein Beispiel eines symmetrischen $(0, 2)$ -Tensors.

Beispiel 12.13 (Fast komplexe Struktur). Sei V ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum. Wir können ihn zu einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum machen, wenn wir eine Abbildung $J : V \rightarrow V$ haben mit $J^2 = -id$ und dann definieren durch $(a + ib)v = av + bJv$. Ein solches J heißt eine **komplexe Struktur** auf V .

Eine **fast komplexe Struktur** auf M ist eine Abbildung $J : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ derart, dass sie für alle $p \in M$ eine komplexe Struktur auf $T_p M$ induziert. Somit ist eine fast komplexe Struktur ein Beispiel eines $(1, 1)$ -Tensorfeldes.

12.4 Pullbacks von Tensorfeldern

Genau wie Kovektorfelder können kovariante Tensorfelder durch eine glatte Abbildung zurückgezogen werden und ergeben dann Tensorfelder auf dem Definitionsbereich. Diese Konstruktion funktioniert nur für kovariante Tensorfelder; dies ist ein Grund, warum wir den größten Teil unserer Aufmerksamkeit auf den kovarianten Fall richten. Der Grund ist derselbe wie dafür, dass der Pullback eines Kovektorfeldes immer definiert ist.

Definition 12.14. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für jeden Punkt $p \in M$ und jeden k -Tensor $\alpha \in T^k(T_{F(p)}^*N)$ definieren wir einen Tensor $dF_p^*(\alpha) \in T^k(T_p^*M)$, genannt der **punktweise Pullback von α durch F in p** , durch

$$dF_p^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)), \quad v_1, \dots, v_k \in T_p M. \quad (12.4)$$

Ist A ein kovariantes k -Tensorfeld auf N , so definieren wir ein k -Tensorfeld F^*A auf M , genannt der **Pullback von A durch F** , durch

$$(F^*A)_p = dF_p^*(A_{F(p)}),$$

das auf Vektoren $v_1, \dots, v_k \in T_p M$ wirkt durch

$$(F^*A)_p(v_1, \dots, v_k) = A_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)). \quad (12.5)$$

Ganz genauso, wie wir die Eigenschaften über den Pullback von Vektorfeldern und Kovektorfeldern bewiesen haben, erhalten wir die folgende Proposition, die einige grundlegende Eigenschaften des Pullbacks von Tensorfeldern zusammenfasst.

Vorschlag 12.15. Seien $F: M \rightarrow N$ und $G: N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, seien A und B kovariante Tensorfelder auf N , C Tensorfelder auf P und sei $f \in C^\infty(N)$.

- (a) $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$.
- (b) $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$.
- (c) $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$.
- (d) F^*B ist ein stetiges Tensorfeld und ist glatt, falls B glatt ist.
- (e) $(G \circ F)^*C = F^*(G^*C)$.
- (f) $(\text{Id}_N)^*B = B$.

Dies führt unmittelbar zur folgenden Folgerung, die eine Beschreibung des Pullbacks eines Tensorfeldes in lokalen Koordinaten liefert und mit Gleichung (11.10) für Kovektorfelder verglichen werden sollte.

Folge 12.16. Sei $F: M \rightarrow N$ glatt, und sei B ein kovariantes k -Tensorfeld auf N . Wenn $p \in M$ und (y^i) glatte Koordinaten für N auf einer Umgebung von $F(p)$ sind, dann hat F^*B in einer Umgebung von p die folgende Darstellung:

$$F^*(B_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_k}) = (B_{i_1 \dots i_k} \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y^{i_k} \circ F). \quad (12.6)$$

Im Allgemeinen gibt es weder eine Pushforward- noch eine Pullback-Operation für gemischte Tensorfelder. Im Spezialfall eines Diffeomorphismus können Tensorfelder beliebiger Varianz jedoch vorwärts- und zurückgeschoben werden. Wir geben das Ergebnis und wichtige Eigenschaften im Folgenden nur an.

Vorschlag 12.17. Sei $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann verallgemeinern

$$F_* : \Gamma(T^{(k,l)}TM) \rightarrow \Gamma(T^{(k,l)}TN), \quad F^* : \Gamma(T^{(k,l)}TN) \rightarrow \Gamma(T^{(k,l)}TM),$$

die üblichen Pushforwards und Pullbacks von Vektorfeldern beziehungsweise Kovektorfeldern derart, dass

1. $F_* = (F^*)^{-1}$.
2. $F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B)$.
3. $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$ und $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.
4. Für jeden kovarianten k -Tensor A auf N gilt $F^*(A(X_1, \dots, X_k)) = F^*A(F_*^{-1}(X_1), \dots, F_*^{-1}(X_k))$.

12.5 Lie-Ableitungen von Tensorfeldern

Sobald wir wissen, was Pullbacks von Tensorfeldern sind, können wir die Idee der Lie-Ableitung von Kovektorfeldern in Richtung eines Vektorfeldes nachahmen und sie erweitern, um die Lie-Ableitung eines beliebigen Tensorfeldes in Richtung eines Vektorfeldes zu definieren.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei V ein glattes Vektorfeld auf M , und sei θ sein Fluss. Für jedes $p \in M$ ist θ_t für t hinreichend nahe bei null ein Diffeomorphismus von einer Umgebung von p auf eine Umgebung von $\theta_t(p)$, sodass $d(\theta_t)_p^*$ Tensoren in $\theta_t(p)$ durch die Formel nach p zurückzieht

$$d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})(v_1, \dots, v_k) = A_{\theta_t(p)}(d(\theta_t)_p(v_1), \dots, d(\theta_t)_p(v_k)).$$

Hierbei ist $d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})$ gerade der Wert des Pullback-Tensorfeldes θ_t^*A in p .

Definition 12.18. Für ein glattes kovariantes Tensorfeld A auf M definieren wir die **Lie-Ableitung von A bezüglich V** , bezeichnet mit $\mathcal{L}_V A$, durch

$$(\mathcal{L}_V A)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^* A)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) - A_p}{t}, \quad (12.7)$$

sofern die Ableitung existiert. Die Größe $\mathcal{L}_V A$ ist ein glattes Tensorfeld auf M und ist ein Tensor desselben Typs wie A .

Vorschlag 12.19. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Seien $f \in C^\infty(M)$ und A, B glatte kovariante Tensorfelder auf M . Dann gilt:

- (a) $\mathcal{L}_V(fA) = (\mathcal{L}_V f)A + f\mathcal{L}_V A$.
- (b) $\mathcal{L}_V(A \otimes B) = (\mathcal{L}_V A) \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$.
- (c) Wenn $X_1, \dots, X_k$ glatte Vektorfelder sind und A ein glattes k -Tensorfeld ist, dann gilt

$$\mathcal{L}_V(A(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_V A)(X_1, \dots, X_k) + A(\mathcal{L}_V X_1, \dots, X_k) + \dots + A(X_1, \dots, \mathcal{L}_V X_k). \quad (12.8)$$

- (d) Außerdem gilt

$$(\mathcal{L}_V A)(X_1, \dots, X_k) = V(A(X_1, \dots, X_k)) - A([V, X_1], X_2, \dots, X_k) - \dots - A(X_1, \dots, X_{k-1}, [V, X_k]). \quad (12.9)$$

Beweis. Übung, die auf dieselbe Weise gelöst werden kann wie die entsprechende Aussage für Vektorfelder. □

Betrachten wir ein Beispiel dafür, wie man die Lie-Ableitung eines $(0, 2)$ -Tensors in lokalen Koordinaten berechnen kann.

Beispiel 12.20. Sei A ein beliebiges glattes kovariantes 2-Tensorfeld, und sei V ein glattes Vektorfeld. Wir berechnen die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_V A$ in glatten lokalen Koordinaten (x^i) . Zunächst beobachten wir, dass $\mathcal{L}_V dx^i = d(\mathcal{L}_V x^i) =$

$d(Vx^i) = dV^i$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V A &= \mathcal{L}_V(A_{ij}dx^i \otimes dx^j) \\ &= \mathcal{L}_V(A_{ij})dx^i \otimes dx^j + A_{ij}(\mathcal{L}_V dx^i) \otimes dx^j + A_{ij}dx^i \otimes (\mathcal{L}_V dx^j) \\ &= V A_{ij}dx^i \otimes dx^j + A_{ij}dV^i \otimes dx^j + A_{ij}dx^i \otimes dV^j \\ &= \left(V A_{ij} + A_{kj} \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + A_{ik} \frac{\partial V^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j.\end{aligned}$$

Sobald wir also die Darstellung des Vektorfeldes V in lokalen Koordinaten und die Darstellung des Tensors A in lokalen Koordinaten kennen, können wir die Darstellung von $\mathcal{L}_V A$ in lokalen Koordinaten explizit in Termen der Ableitungen der Komponentenfunktionen von V und A angeben. Ähnliche Formeln gelten für Tensoren höheren Ranges.

Erinnern wir uns daran, dass die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes W bezüglich V genau dann null ist, wenn W unter dem Fluss von V invariant ist; dies war der Inhalt von Proposition 10.7. Für Tensoren können wir eine ähnliche Aussage treffen. Ist A ein glattes Tensorfeld auf M und θ ein Fluss auf M , so sagen wir, dass A **unter θ invariant ist**, wenn für jedes t die Abbildung θ_t das Tensorfeld A überall dort, wo sie definiert ist, auf sich selbst zurückzieht, das heißt

$$d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) = A_p \quad (12.11)$$

für alle (t, p) im Definitionsbereich von θ . Wenn θ ein globaler Fluss ist, ist dies äquivalent zu $\theta_t^* A = A$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Das folgende Ergebnis ist ein Analogon von Proposition 10.5, die zeigt, wie die Lie-Ableitung verwendet werden kann, um Zeitableitungen zu Zeiten ungleich $t = 0$ zu berechnen.

Vorschlag 12.21. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Sei θ der Fluss von V . Für jedes glatte kovariante Tensorfeld A und jedes (t_0, p) im Definitionsbereich von θ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\theta_t^* A)_p = (\theta_{t_0}^* (\mathcal{L}_V A))_p. \quad (12.10)$$

Beweis. Verwenden wir die Definition des Pullbacks von Tensoren, so sehen wir, dass (12.10) äquivalent dazu ist zu beweisen, dass

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) = d(\theta_{t_0})_p^*((\mathcal{L}_V A)_{\theta_{t_0}(p)}).$$

Wir ahnen den Beweis von Proposition 10.5 nach und führen die Variablentransformation $t = s + t_0$ durch, um zu erhalten

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{s+t_0})_p^*(A_{\theta_{s+t_0}(p)}) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{t_0})_p^* d(\theta_s)_{\theta_{t_0}(p)}^*(A_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \\ &= d(\theta_{t_0})_p^* \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_s)_{\theta_{t_0}(p)}^*(A_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \\ &= d(\theta_{t_0})_p^*((\mathcal{L}_V A)_{\theta_{t_0}(p)}).\end{aligned}$$

□

Somit erhalten wir unmittelbar das Analogon von Proposition 10.7 für Tensoren.

Satz 12.22. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Ein glattes kovariantes Tensorfeld A ist genau dann invariant unter dem Fluss von V , wenn $\mathcal{L}_V A = 0$. □

13. Differentialformen

Im vorherigen Kapitel haben wir gelernt, was Tensoren sind. Unter allen Tensoren gibt es spezielle Arten von Tensoren, die als symmetrische und schiefsymmetrische Tensoren bezeichnet werden. In diesem Kapitel werden wir uns mit Letzteren beschäftigen. Zuerst definieren wir jedoch sowohl symmetrische als auch schiefsymmetrische Tensoren.

Definition 13.1. Ein kovarianter Tensor α vom Rang k auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V heißt **symmetrisch**, wenn

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \quad (13.1)$$

für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt.

Tatsächlich impliziert (13.1), dass der Wert von α unverändert bleibt, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ in einer beliebigen Reihenfolge umgeordnet werden. Ausgedrückt in den Komponentenfunktionen bedeutet dies, dass $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ durch jede Permutation der Indizes unverändert bleibt.

Die Menge der symmetrischen kovarianten k -Tensoren $\Sigma^k(V^*)$ ist ein linearer Unterraum des Raumes $T^k(V^*)$ aller kovarianten k -Tensoren auf V . Aus jedem beliebigen Tensor α können wir wie folgt einen symmetrischen Tensor machen. Es bezeichne S_k die symmetrische Gruppe auf k Elementen. Für einen gegebenen k -Tensor α und eine Permutation $\sigma \in S_k$ definieren wir einen neuen k -Tensor ${}^\sigma\alpha$ durch

$${}^\sigma\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Beachten Sie, dass ${}^\tau({}^\sigma\alpha) = {}^{\tau\sigma}\alpha$ gilt, wobei $\tau\sigma$ die Verknüpfung von τ und σ darstellt, das heißt $\tau\sigma(i) = \tau(\sigma(i))$.

Wir definieren eine Projektion $\text{Sym}: T^k(V^*) \rightarrow \Sigma^k(V^*)$, genannt **Symmetrisierung**, durch

$$\text{Sym } \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^\sigma\alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Offensichtlich ist $\text{Sym } \alpha$ ein symmetrischer Tensor.

Wenn α und β symmetrische Tensoren auf V sind, dann ist $\alpha \otimes \beta$ im Allgemeinen nicht symmetrisch. Betrachten wir beispielsweise α und β als Kovektoren. Einzeln betrachtet sind beide symmetrisch, aber es gilt

$$\alpha \otimes \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) \neq \alpha \otimes \beta(v_2, v_1).$$

Wir können jedoch die Symmetrisierung von $\alpha \otimes \beta$ wie oben definieren. Wenn $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$ und $\beta \in \Sigma^l(V^*)$ sind, definieren wir ihr **symmetrisches Produkt** als den $(k+l)$ -Tensor $\alpha\beta$ durch

$$\alpha\beta = \text{Sym}(\alpha \otimes \beta),$$

dessen Wirkung auf Vektoren $v_1, \dots, v_{k+l}$ gegeben ist durch

$$\alpha\beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Wenn beispielsweise α und β Kovektoren sind, gilt folglich

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

Dieselbe Analyse auf jedem Tangentialraum liefert den Begriff der symmetrischen Tensoren auf Mannigfaltigkeiten. Ein Beispiel dafür haben wir bereits zuvor gesehen: die Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit. Wir werden später mehr darüber erfahren.

13.1 Alternierende Tensoren

Lassen Sie uns zuerst verschiedene Begriffe im Zusammenhang mit alternierenden Tensoren auf einem Vektorraum besprechen. Anschließend werden wir dieses gesamte Wissen einfach auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir haben die folgende Definition.

Definition 13.2. Ein kovarianter k -Tensor α auf V heißt **alternierend** oder **schiefsymmetrisch**, wenn er sein Vorzeichen wechselt, wann immer zwei seiner Argumente miteinander vertauscht werden. Das heißt, für alle Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ und jedes Paar verschiedener Indizes i, j gilt

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k). \quad (13.2)$$

Alternierende kovariante k -Tensoren werden auch als **äußere Formen** bezeichnet.

Sowie zur Erinnerung: Für jede Permutation $\sigma \in S_k$ ist das **Vorzeichen** (oder das **Signum**) von σ , bezeichnet mit $\text{sgn } \sigma$, gleich $+1$, wenn σ gerade ist, und -1 , wenn σ ungerade ist. Folglich impliziert (13.2), dass für einen alternierenden Tensor α , beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_k$ und jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt:

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k),$$

und die Komponenten $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ von α wechseln das Vorzeichen, wann immer zwei Indizes miteinander vertauscht werden.

Notation. Der Vektorraum aller alternierenden k -Tensoren auf V wird mit $\Lambda^k(V^*)$ bezeichnet. Offensichtlich sind alle 0-Tensoren und 1-Tensoren alternierend.

Vorschlag 13.3. Es sei α ein kovarianter k -Tensor auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) α ist alternierend.
- (b) $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$, wann immer das k -Tupel $(v_1, \dots, v_k)$ linear abhängig ist.
- (c) α liefert den Wert Null, wann immer zwei seiner Argumente gleich sind:

$$\alpha(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = 0.$$

Beweis. Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (c) und (b) $\Rightarrow$ (c) sind unmittelbar ersichtlich. Wir vervollständigen den Beweis, indem wir zeigen, dass (c) sowohl (a) als auch (b) impliziert.

Nehmen wir an, dass α die Bedingung (c) erfüllt. Für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_k$ impliziert die Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Folglich ist α alternierend. Wenn andererseits $(v_1, \dots, v_k)$ ein linear abhängiges k -Tupel ist, dann lässt sich einer der Vektoren v_i als Linearkombination der anderen schreiben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass

$$v_k = \sum_{j=1}^{k-1} a^j v_j$$

gilt. Dann impliziert die Multilinearität von α :

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^{k-1} a^j \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}, v_j).$$

In jedem dieser Terme besitzt α zwei identische Argumente, sodass jeder einzelne Term Null ist. □

Wir definieren nun das Analogon des Symmetrisierungsoperators zur Konstruktion alternierender Tensoren.

Wir definieren die Projektion $\text{Alt}: T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$, genannt **Alternierung** oder **Schiefsymmetrisierung**, durch:

$$\text{Alt } \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) (\sigma \alpha),$$

wobei S_k die symmetrische Gruppe auf k Elementen ist. Expliziter ausgedrückt bedeutet dies:

$$(\text{Alt } \alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Wenn beispielsweise β ein 2-Tensor ist, dann gilt somit

$$(\text{Alt } \beta)(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v)).$$

Für einen 3-Tensor γ gilt:

$$(\text{Alt } \gamma)(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{6}(\gamma(v_1, v_2, v_3) + \gamma(v_2, v_3, v_1) + \gamma(v_3, v_1, v_2) - \gamma(v_2, v_1, v_3) - \gamma(v_1, v_3, v_2) - \gamma(v_3, v_2, v_1)).$$

Wir versuchen nun, eine explizite Basis des Raumes $\Lambda^k(V^*)$ zu konstruieren, indem wir das Konzept der elementaren äußeren Formen einführen.

Notation. Für $k \in \mathbb{Z}$ wird ein geordnetes k -Tupel $I = (i_1, \dots, i_k)$ positiver ganzer Zahlen als ein **Multiindex der Länge k** bezeichnet. Wenn I ein solcher Multiindex ist und $\sigma \in S_k$, schreiben wir I_σ für den Multiindex $I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$. Beachten Sie, dass $I_{\sigma\tau} = (I_\sigma)_\tau$ für $\sigma, \tau \in S_k$ gilt.

Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum, und angenommen, $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ ist eine beliebige Basis für V^* . Wir definieren nun eine Familie von äußeren k -Formen auf V , welche die Determinantenfunktion auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Für jeden Multiindex $I = (i_1, \dots, i_k)$ der Länge k mit $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ definieren wir einen kovarianten k -Tensor $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1 \dots i_k}$ durch

$$\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Da die Determinante bei Vertauschung zweier Spalten ihr Vorzeichen ändert, ist klar, dass ε^I ein alternierender k -Tensor ist. Wir nennen ε^I einen **elementaren alternierenden Tensor**.

Beispiel 14.5. Ausgedrückt in der Standard-Dualbasis (e^1, e^2, e^3) für $(\mathbb{R}^3)^*$ erhalten wir

$$e^{13}(v, w) = v^1 w^3 - w^1 v^3.$$

Vorschlag 13.4 (Eigenschaften elementarer äußerer k -Formen). Es sei (E_i) eine Basis für V , (ε^i) die zugehörige Dualbasis für V^* und ε^I wie oben definiert.

1. Wenn I einen doppelten Index enthält, dann ist $\varepsilon^I = 0$.
2. Wenn $J = I_\sigma$ für ein $\sigma \in S_k$, dann gilt $\varepsilon^I = (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^J$.
3. Das Ergebnis der Auswertung von ε^I auf einer Folge von Basisvektoren ist

$$\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wenn I einen doppelten Index enthält, dann hat die Determinante in (13.3) für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_k$ zwei identische Zeilen und ist folglich gleich Null, was (a) beweist. Wenn andererseits J aus I durch Vertauschung zweier Indizes hervorgeht, weisen die entsprechenden Determinanten entgegengesetzte Vorzeichen auf; dies impliziert (b). Schließlich folgt (c) unmittelbar aus der Definition von ε^I . $\square$

Wir können nun die elementaren äußeren k -Formen verwenden, um eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$ anzugeben. Ein Multiindex $I = (i_1, \dots, i_k)$ heißt **aufsteigend**, wenn $i_1 < \dots < i_k$ gilt.

Vorschlag 13.5 (Eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$). Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Wenn (ε^i) eine beliebige Basis für V^* ist, dann ist für jede positive ganze Zahl $k \leq n$ die Familie äußerer k -Formen

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon^I : I \text{ ist ein aufsteigender Multiindex der Länge } k\}$$

eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$. Folglich gilt:

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Wenn $k > n$, dann ist $\dim \Lambda^k(V^*) = 0$.

Beweis. Dass $\Lambda^k(V^*)$ der triviale Vektorraum ist, wenn $k > n$, folgt unmittelbar aus Proposition 13.3 (b), da in diesem Fall jedes k -Tupel von Vektoren linear abhängig ist. Für den Fall $k \leq n$ müssen wir zeigen, dass die Menge $\mathcal{E}$ den Raum $\Lambda^k(V^*)$ aufspannt und linear unabhängig ist. Es sei (E_i) die zu (ε^i) duale Basis für V .

Um zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ den Raum $\Lambda^k(V^*)$ aufspannt, sei $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ beliebig. Für jeden Multiindex $I = (i_1, \dots, i_k)$ (nicht notwendigerweise aufsteigend) definieren wir eine reelle Zahl α_I durch

$$\alpha_I = \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Da α alternierend ist, gilt $\alpha_I = 0$, wenn I einen doppelten Index enthält, und $\alpha_J = (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha_I$, wenn $J = I_\sigma$ für ein $\sigma \in S_k$ gilt. Für jeden Multiindex J haben wir somit:

$$\sum_{I \text{ aufsteigend}} \alpha_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \alpha_J = \alpha(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}).$$

Daraus folgt $\sum_{I \text{ aufsteigend}} \alpha_I \varepsilon^I = \alpha$, sodass $\mathcal{E}$ den Raum $\Lambda^k(V^*)$ aufspannt. **Der Beweis der linearen Unabhängigkeit ist eine Übungsaufgabe.** $\square$

13.2 Das Dach-Produkt

Wir betrachten nun eine Operation, die es uns ermöglicht, zwei oder mehr äußere Formen miteinander zu verknüpfen, sodass sich wieder eine äußere Form ergibt. Wir arbeiten weiterhin auf einem reellen, endlichdimensionalen Vektorraum V . Wie wir unten sehen werden, entspricht die Operation des Dach-Produkts genau der Alternierung des Tensorprodukts mit einer passend gewählten Normierungskonstante.

Definition 13.6. Für $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ definieren wir ihr **Dach-Produkt** (oder **äußeres Produkt**) als die folgende äußere $(k+l)$ -Form:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta). \quad (13.4)$$

Einer der Gründe, warum wir diese Normierungskonstante in (13.4) wählen, ist die folgende Beziehung für elementare alternierende Tensoren. Man kann überprüfen, dass für beliebige Multiindizes $I = (i_1, \dots, i_k)$ und $J = (j_1, \dots, j_l)$ gilt:

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

wobei $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) von I und J entsteht.

Wir betrachten nun einige wichtige Eigenschaften des Dach-Produkts.

Vorschlag 13.7. Angenommen, $\omega, \omega', \eta, \eta'$ und ξ sind äußere Formen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V .

1. **Bilinearität:** Für $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

2. **Assoziativität:**

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

3. **Antikommutativität:** Für $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ gilt:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega. \quad (13.5)$$

4. Wenn (ε^i) eine beliebige Basis für V^* ist und $I = (i_1, \dots, i_k)$ ein beliebige Multiindex, dann gilt:

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I. \quad (13.6)$$

5. Für beliebige Kovektoren $\omega^1, \dots, \omega^k$ und Vektoren $v_1, \dots, v_k$ gilt:

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^j(v_i)). \quad (13.7)$$

Beweis. Da das Dach-Produkt die Alternierung des Tensorprodukts ist und das Tensorprodukt eine bilineare Operation darstellt, folgt die Bilinearität des Dach-Produkts. Wir beweisen 2. und 3. für elementare alternierende Tensoren, woraus sich der allgemeine Fall ergibt. Beachten Sie, dass

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K),$$

woraus die Assoziativität des Dach-Produkts folgt. Für Teil 3. stellen wir unter Verwendung der Eigenschaft, eine äußere Form zu sein, wieder fest, dass

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\operatorname{sgn} \sigma) \varepsilon^{JI} = (\operatorname{sgn} \sigma) \varepsilon^J \wedge \varepsilon^I,$$

gilt, wobei σ die Permutation ist, die IJ nach JI abbildet. Der wesentliche Punkt ist nun: Wenn man sowohl I als auch J als Produkt von 2-Zyklen schreibt, erfordert das Verschieben von J nach vorne und I nach hinten das Vorbeiziehen aller Indizes von J , weshalb $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^{kl}$ aufgrund von τ gilt. Dies beweist die Antikommutativität für alternierende Tensoren, und der allgemeine Fall folgt dann aus der Bilinearität.

Teil (4) ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Tatsache, dass $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$ gilt. Teil 5. bleibt als Übungsaufgabe überlassen. $\square$

Notation. Wir schreiben $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}$.

Definition 13.8. Für jeden n -dimensionalen Vektorraum V definieren wir einen Vektorraum $\Lambda(V^*)$, genannt die **äußere Algebra** (oder **Grassmann-Algebra**) von V , durch

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V^*).$$

Beachten Sie, dass $\dim \Lambda(V^*) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$ gilt.

Das Dach-Produkt ist eine Operation auf $\Lambda(V^*)$ und macht $\Lambda(V^*)$ zu einer assoziativen, aber nicht kommutativen Algebra.

Bemerkung 13.9. Eine Algebra A heißt **graduier**t, wenn sie eine direkte Summenzerlegung

$$A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$$

besitzt, sodass das Produkt die Bedingung

$$(A^k)(A^l) \subseteq A^{k+l}$$

für alle k und l erfüllt. Eine graduierte Algebra ist **antikommutativ**, wenn das Produkt die Bedingung

$$ab = (-1)^{kl}ba$$

für $a \in A^k$, $b \in A^l$ erfüllt. Folglich ist $\Lambda(V^*)$ eine antikommutative graduierte Algebra.

Wir sagen, dass eine k -Form ω **zerlegbar** (oder **dekomponierbar**) ist, wenn sie als Dach-Produkt von k 1-Formen geschrieben werden kann, also $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$, wobei die ω_i 1-Formen sind. Nicht jede k -Form ist zerlegbar, aber jede k -Form kann als Linearkombination von zerlegbaren Formen dargestellt werden.

13.3 Inneres Produkt

Wir diskutieren nun kurz den Begriff des inneren Produkts (auch Einsetzung oder Kontraktion genannt).

Definition 13.10. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jedes $v \in V$ definieren wir eine lineare Abbildung

$$i_v : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V^*),$$

genannt **inneres Produkt mit v** , durch

$$i_v \omega(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1}). \quad (13.8)$$

Das heißt, $i_v \omega$ entsteht aus ω , indem man v in das erste Argument einsetzt. Wir verwenden auch die Notation

$$v \lrcorner \omega = i_v \omega.$$

und lesen dies als „ v hook ω “.

Sehen wir uns einige elementare Eigenschaften des inneren Produkts an.

Vorschlag 13.11. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $v \in V$.

1. $i_v \circ i_v = 0$.
2. Wenn $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^l(V^*)$, gilt:

$$v \lrcorner (\omega \wedge \eta) = (v \lrcorner \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (v \lrcorner \eta). \quad (13.9)$$

Beweis. Wenn ω eine Funktion oder ein Kovektor ist, liefert das zweimalige Anwenden des inneren Produkts direkt 0. Für äußere Formen vom Grad k mit $k \geq 2$ stellen wir fest, dass $i_v \circ i_v$ bedeutet, dass wir denselben Vektor in die ersten beiden Argumente einsetzen; da ω alternierend ist, erhalten wir Teil 1.

Wir beweisen nun Teil 2. und merken an, dass es genügt, den Fall zu betrachten, in dem sowohl ω und η zerlegbar sind, da jede äußere Form als Linearkombination von zerlegbaren Formen geschrieben werden kann.

Es sei $v_1 = v \in V$ und wählen wir ein beliebiges $(k-1)$ -Tupel von Vektoren $(v_2, \dots, v_k)$. Es seien $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-Formen. Wir zeigen zuerst, dass

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_2, \dots, v_k), \quad (13.10)$$

gilt, wobei das Dach anzeigt, dass ω^i ausgelassen wird. Um zu sehen, warum (13.10) wahr ist, bemerken wir, dass die linke Seite die Determinante der Matrix $[A]_{ij}$ ist, deren (i, j) -Eintrag $\omega^i(v_j)$ lautet. Zur Analyse der rechten Seite bezeichne v_j^i die $(k-1) \times (k-1)$ -Submatrix von $[A]$, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht. Dann ist die rechte Seite von (13.10) gleich

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \det v_1^i.$$

Dies ist exakt die Entwicklung von $\det[A]$ nach Laplaceschem Entwicklungssatz entlang der ersten Spalte und folglich gleich $\det[A]$. Somit gilt (13.10). Daraus erhalten wir schließlich:

$$v \lrcorner (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^k,$$

was Teil 2 für zerlegbare Formen und damit für alle äußeren Formen beweist. $\square$

13.4 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Nachdem wir äußere Formen auf Vektorräumen und die verschiedenen Operationen im Zusammenhang mit Differentialformen verstanden haben, setzen wir nun $V = T_p M$, wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ist, und bilden die vorangegangenen Abschnitte nach. Dies führt zum Begriff des Raumes der Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit sowie zu Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten selbst.

Wir bezeichnen die Teilmenge von $T^k T^* M$, die aus alternierenden Tensoren besteht, mit $\Lambda^k T^* M$:

$$\Lambda^k T^* M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k (T_p^* M).$$

Wie zuvor ist $\Lambda^k T^* M$ für jedes $p \in M$ ein $\binom{n}{k}$ -dimensionaler Vektorraum.

Definition 13.12. Eine **Differential- k -Form** ist ein Tensorfeld, dessen Wert an jedem Punkt ein alternierender Tensor ist. Die ganze Zahl k wird als **Grad** der Form bezeichnet, und wir bezeichnen den Vektorraum der glatten k -Formen mit

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M).$$

Das Dachprodukt (Keilprodukt) von zwei Differentialformen wird punktweise definiert: $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$. Somit ist das Dachprodukt einer k -Form mit einer l -Form eine $(k+l)$ -Form. Wenn f eine 0-Form und η eine k -Form ist, interpretieren wir das Dachprodukt $f \wedge \eta$ als das gewöhnliche Produkt $f\eta$. Wenn wir

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M) \quad (13.11)$$

definieren, macht das Dachprodukt $\Omega^*(M)$ zu einer assoziativen, antikommutativen graduierten Algebra.

In jeder glatten Karte kann eine k -Form ω lokal geschrieben werden als

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

wobei die Koeffizienten ω_I stetige Funktionen auf dem Koordinatengebiet sind. Beachten Sie, dass

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}$$

und die Komponentenfunktionen ω_I von ω bestimmt sind durch

$$\omega_I = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Wir geben hier lediglich die Ausdrücke für den Rückzug (Pullback) von Differentialformen an, welche Spezialfälle des Rückzugs von Tensorfeldern aus § ?? sind. Angenommen, $F: M \rightarrow N$ ist glatt. Dann gilt

$$F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta), \quad (13.12)$$

und der lokale Koordinatenausdruck lautet

$$F^* \left(\sum_{I-\text{aufsteigend}} \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \right) = \sum_{I-\text{aufsteigend}} (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

Betrachten wir ein explizites Beispiel.

Beispiel 13.13. Definiere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ und sei ω die 2-Form $y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$ auf $\mathbb{R}^3$. Der Rückzug $F^*\omega$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} F^*(y dx \wedge dz + x dy \wedge dz) &= v du \wedge d(u^2 - v^2) + u dv \wedge d(u^2 - v^2) \\ &= v du \wedge (2u du - 2v dv) + u dv \wedge (2u du - 2v dv) \\ &= -2v^2 du \wedge dv + 2u^2 dv \wedge du = -2(u^2 + v^2) du \wedge dv, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache genutzt haben, dass $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ und $du \wedge dv = -dv \wedge du$ aufgrund der Antikommutativität gilt.

Die innere Multiplikation (Interior Product) lässt sich ebenfalls natürlich auf Vektorfelder und Differentialformen erweitern, indem sie punktweise wirkt: Wenn $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$, definieren wir eine $(k-1)$ -Form $X \lrcorner \omega = i_X \omega$ durch

$$(X \lrcorner \omega)_p = X_p \lrcorner \omega_p.$$

13.5 Äußere Ableitung

In diesem Abschnitt definieren wir einen natürlichen und wahrscheinlich den wichtigsten Differentialoperator auf glatten Formen, die sogenannte **äußere Ableitung**. Sie ist eine Verallgemeinerung des Differentials einer Funktion.

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M werden wir zeigen, dass es einen Differentialoperator $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ gibt, der $d(d\omega) = 0$ für alle ω erfüllt. Wir gehen dabei schrittweise vor. Zuerst zeigen wir die Definition des Operators d auf $\mathbb{R}^n$ und nutzen dies, um die Existenz eines Operators d auf jeder glatten Mannigfaltigkeit zu beweisen, der die gewünschten Eigenschaften aus dem $\mathbb{R}^n$ erfüllt. Wir tun dies, indem wir eine invariante Formel für die äußere Ableitung d angeben.

Die Definition von d im euklidischen Raum lautet wie folgt:

Definition 13.14. Sei $\omega = \sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ eine glatte k -Form auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir definieren ihre **äußere Ableitung** $d\omega \in \Omega^{k+1}$ durch

$$d \left(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}, \quad (13.13)$$

wobei $d\omega_J$ das Differential der Funktion ω_J ist. Somit kann (13.13) geschrieben werden als

$$d \left(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) = \sum_J \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \quad (13.14)$$

Wenn ω beispielsweise eine 1-Form ist, impliziert (13.14)

$$\begin{aligned} d(\omega_j dx^j) &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i > j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

nachdem wir i und j in der zweiten Summe vertauscht und die Tatsache $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ verwendet haben. Für eine glatte 0-Form f impliziert (13.14)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

was genau das Differential von f ist.

Betrachten wir einige Eigenschaften der äußeren Ableitung im $\mathbb{R}^n$, bevor wir ihre Definition auf einer Mannigfaltigkeit betrachten.

Vorschlag 13.15. Die äußere Ableitung d erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(a) d ist linear über $\mathbb{R}$.

(b) Wenn $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\eta \in \Omega^l(U)$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \quad (13.15)$$

(c) $d \circ d \equiv 0$. Dies zeigt insbesondere, dass $\text{Im}(d_{k-1}) \subset \ker(d_k)$.

(d) d kommutiert mit Rückzügen: Für offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, eine glatte Abbildung $F: U \rightarrow V$ und eine Form $\omega \in \Omega^k(V)$ gilt

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega). \quad (13.16)$$

Proof. Die Linearität von d ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition. Um (b) zu beweisen, genügt es aufgrund der Linearität, Terme der Form $\omega = u dx^I \in \Omega^k(U)$ und $\eta = v dx^J \in \Omega^l(U)$ für glatte reellwertige Funktionen u und v zu betrachten. Wir berechnen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d((u dx^I) \wedge (v dx^J)) \\ &= d(uv dx^I \wedge dx^J) \quad (\text{Linearität von } \wedge \text{ über } C^\infty(M)) \\ &= (v du + u dv) \wedge dx^I \wedge dx^J \quad (\text{Produktregel}) \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (v dx^J) + (-1)^k (u dx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) \quad (\text{Assoziativität von } \wedge) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

wobei der Faktor $(-1)^k$ daher rührt, dass $dv \wedge dx^I = (-1)^k dx^I \wedge dv$, da dv eine 1-Form und dx^I eine k -Form ist.

Beachten Sie, dass die gemischten zweiten Ableitungen für Funktionen kommutieren, daher gilt $d \circ d = 0$ für 0-Formen, d.h. für $f \in C^\infty(M)$.

Wir beweisen (c) zuerst für Funktionen (0-Formen). In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} d(du) &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall haben wir

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_{J-\text{aufsteigend}} d\omega_J \wedge dx^J\right) \\ &= \sum_{J-\text{aufsteigend}} d(d\omega_J) \wedge dx^J - \sum_{J-\text{aufsteigend}} d\omega_J \wedge d(dx^J) \quad (\text{unter Verwendung von (b)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir den Fall $k = 0$ für die Funktionen ω_J verwendet haben.

Schließlich, um (d) zu beweisen, genügt es wieder, $\omega = u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ zu betrachten. Für eine solche Form ist die linke Seite von (13.16)

$$\begin{aligned} F^*(d(u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= F^*(du \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F), \end{aligned}$$

und die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} d(F^*(u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= d((u \circ F) d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F), \end{aligned}$$

sodass sie gleich sind. □

Wir möchten nun die Situation im $\mathbb{R}^n$ nachahmen und die äußere Ableitung auf Mannigfaltigkeiten definieren. Offensichtlich möchten wir, dass der äußere Ableitungsoperator $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ die Eigenschaften aus Proposition 13.15 erfüllt. Er sollte auch das Differential von Funktionen verallgemeinern. Im Gegensatz zum Dachprodukt, dem inneren Produkt und den Rückzugoperationen, die wir früher definiert haben, ist die äußere Ableitung keine punktweise Operation, sondern eine lokale Operation (d.h. sie hängt von den „nahegelegenen Werten“ ab).

Sei $U \subset M$ offen. Für $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ haben wir bereits gesehen, dass $df \in \Omega^1(U)$. Wir erhalten also eine lineare Abbildung

$$d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U), \quad f \mapsto df.$$

Lokal in jeder Koordinatenkarte haben wir

$$df = \sum_i (\partial_i f) dx^i,$$

wobei wir die Kurzschreibweise $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ verwenden. Wir haben auch eine „invariante Definition“ von $df \in \Omega^1(U)$ über

$$df(X) = Xf, \quad \forall X \in \Gamma(TU).$$

Nun sei ω eine k -Form auf M , sodass lokal gilt

$$\omega = \sum_I \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wir verwenden (13.13), um die folgende Definition zu geben:

Definition 13.16. Die äußere Ableitung von $\omega \in \Omega^k(U)$ ist die $(k+1)$ -Form $d\omega$, gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_I d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{I, i} \partial_i (\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned} \tag{13.17}$$

Bevor wir fortfahren, müssen wir klarstellen, dass das oben definierte $d\omega$ wohldefiniert ist. Mit anderen Worten: Die $(k+1)$ -Form $d\omega$ sollte unabhängig von der Wahl der Koordinatenkarten sein.

Dies können wir entweder dadurch zeigen, dass (13.17) bei einem Wechsel der Koordinatenkarte unverändert bleibt, oder indem wir eine äquivalente, koordinatenfreie Definition angeben (üblicherweise die invariante Formulierung). Wir wählen hier den zweiten Ansatz, der die Existenz des Operators d auf M beweist, welcher – eingeschränkt auf eine Koordinatenkarte (U, x) – zu (13.17) führt.

Beginnen wir mit kleinen k , um die invariante Formel für $d\omega$ zu finden:

- Für $k = 0$, d.h. $\omega = f \in C^\infty(U)$, können wir df als eine $C^\infty(U)$ -lineare Abbildung

$$df : \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U)$$

betrachten, für die gilt:

$$df(X) = Xf.$$

- Für $k = 1$, d.h. $\omega \in \Omega^1(U)$, ist $d\omega \in \Omega^2(U)$ und sollte daher zwei Vektorfelder als Argumente und eine Funktion als Ergebnis haben:

$$d\omega : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U).$$

Unter Verwendung der Formel (13.17) erhalten wir einen invarianten Ausdruck. Schreiben wir $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$, $X = \sum_k X^k \partial_k$ und $Y = \sum_l Y^l \partial_l$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \sum_{i, j, k, l} (\partial_j \omega_i) dx^j \wedge dx^i (X^k \partial_k, Y^l \partial_l) \\ &= \sum_{i, j} ((\partial_j \omega_i) X^j Y^i - (\partial_j \omega_i) X^i Y^j) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

- Für $k = 2$, d.h. $\omega \in \Omega^2(U)$, kann man durch eine langwierige Rechnung zeigen, dass für die $C^\infty(U)$ -trilineare Abbildung

$$d\omega : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U)$$

gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = & X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ & - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Dies führt uns zur folgenden *invarianten Formel* für $d\omega$:

Satz 13.17. Für jede $\omega \in \Omega^k(U)$ ist die $(k+1)$ -Form $d\omega$, aufgefasst als $C^\infty(U)$ -multilineare Abbildung

$$d\omega : \underbrace{\Gamma(TU) \times \dots \times \Gamma(TU)}_{k+1\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(U),$$

gegeben durch die Formel

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \quad (13.18)$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \quad (13.19)$$

Proof. Definiere $d\omega$ über die Formel in (13.19). Wir müssen zeigen, dass

1. $d\omega$ ein alternierender Tensor ist, d. h. für alle $m < n$ gilt:

$$d\omega(X_1, \dots, X_m, \dots, X_n, \dots, X_{k+1}) = -d\omega(X_1, \dots, X_n, \dots, X_m, \dots, X_{k+1}).$$

Dass dies wahr ist, kann mithilfe von (13.19) überprüft werden.

- (2) $d\omega$ multilinear, genauer gesagt $C^\infty(U)$ -linear auf U ist. Beachten Sie, dass $d\omega$ offensichtlich $\mathbb{R}$ -linear ist. Wir beweisen, dass für jedes $f \in C^\infty(U)$ gilt:

$$d\omega(fX_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = fd\omega(X_1, \dots, X_{k+1}).$$

Berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} d\omega(fX_1, X_2, \dots, X_{k+1}) &= fX_1(\omega(X_2, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i>1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(fX_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i>1} (-1)^{1+i} \omega([fX_1, X_i], X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{1<i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], fX_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\ &= fd\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i>1} (-1)^{i-1} (X_i f) \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad - \sum_{i>1} (-1)^{1+i} (X_i f) \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &= fd\omega(X_1, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Gleichheitszeichen die Eigenschaft $([fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X)$ verwendet haben.

- (3) Wir überprüfen nun, dass $d\omega$ den lokalen Ausdruck (13.17) besitzt. Dies ist eine Übungsaufgabe.

□

Wir erhalten für das Dachprodukt, das innere Produkt und die Pullbacks (Rückzüge) von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten dieselben Formeln, wie wir sie für Formen auf Vektorräumen hatten.

Das *Dachprodukt* (oder äußere Produkt) $\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \rightarrow \Omega^{k+l}(U)$.

Zum Beispiel:

$$(dx^1 + 2dx^2) \wedge (dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 + 3dx^1 \wedge dx^3) = -7dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Für jedes $V \in \Gamma(TM)$ haben wir das *innere Produkt* $i_V : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ mit

$$V \lrcorner \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = i_V \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(V, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

Für jede glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ hat man den *Pullback* $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$. Dieser ist punktweise über die lineare Abbildung $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ definiert. Wenn also $\omega \in \Omega^k(N)$, dann gilt:

$$(F^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_k)).$$

Wir listen alle Eigenschaften im Zusammenhang mit Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten auf.

Lemma 13.18. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Angenommen, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ und $F : M \rightarrow N$ sei eine glatte Abbildung. Dann gilt:

1. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.
2. $F^*(\omega \wedge \eta) = F^* \omega \wedge F^* \eta$.
3. $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X \eta$.
4. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
5. $i_X \circ i_X = 0$.
6. $d \circ d = 0$.
7. $F^* \circ d = d \circ F^*$.

Proof. Der Beweis verläuft analog zu den Beweisen, die wir für Vektorräume gesehen haben. □

Definition 13.19. Eine Differentialform ω heißt **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt **exakt**, wenn $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$. Da $d \circ d = 0$, erhalten wir:

Jede exakte Form ist geschlossen.

13.6 Lie-Ableitungen von Differentialformen

Wir haben in § ?? Formeln zur Berechnung von Lie-Ableitungen glatter Tensorfelder hergeleitet, welche gleichermaßen auf Differentialformen anwendbar sind. Im Fall von Differentialformen liefert die äußere Ableitung jedoch eine wesentlich mächtigere Formel zur Berechnung von Lie-Ableitungen, was auch bedeutende theoretische Konsequenzen hat.

Die Konzepte, die wir verstehen wollen, betreffen das Verhalten der Lie-Ableitung bezüglich: Dachprodukten, inneren Produkten und der äußeren Ableitung. Wir beginnen mit dem Dachprodukt und erinnern daran, dass das Dachprodukt $\omega \wedge \eta$ die Schiefsymmetrisierung des Tensorprodukts ist. Zudem zeigt Proposition 12.19, dass $\mathcal{L}_V(A \otimes B) = \mathcal{L}_V A \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$ gilt. Somit erhalten wir das Folgende:

Vorschlag 13.20. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $V \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega, \eta \in \Omega^*(M)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}_V(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_V \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_V \eta).$$

Das nächste Theorem ist eine der wichtigsten Gleichungen über die Ableitungen von Differentialformen. Es liefert eine bemerkenswerte Formel für Lie-Ableitungen von Differentialformen, die auf Élie Cartan zurückgeht, den französischen Mathematiker, der die Theorie der Differentialformen erfunden hat.

Satz 13.21 (Cartans magische Formel). Auf einer glatten Mannigfaltigkeit M gilt für jedes glatte Vektorfeld V und jede glatte Differentialform ω :

$$\mathcal{L}_V \omega = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega). \quad (13.20)$$

Proof. Wir beweisen durch Induktion nach k , dass (13.20) für glatte k -Formen gilt. Wir beginnen mit einer glatten 0-Form f , wobei

$$V \lrcorner (df) + d(V \lrcorner f) = V \lrcorner df = df(V) = Vf = \mathcal{L}_V f,$$

was gerade (13.20) entspricht.

Es sei nun $k \geq 1$ und angenommen, (13.20) sei bereits für Formen mit einem Grad kleiner als k bewiesen. Es sei ω eine beliebige glatte k -Form, die in glatten lokalen Koordinaten geschrieben ist als

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wir möchten die Induktionsvoraussetzung und den Induktionsanfang nutzen, daher schreiben wir $f = x^{i_1}$ sowie $\beta = \omega_I dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und stellen fest, dass jeder Term im Ausdruck von ω in der Form $df \wedge \beta$ geschrieben werden kann, wobei f eine glatte Funktion und β eine glatte $(k-1)$ -Form ist. Aus Korollar ?? wissen wir, dass $\mathcal{L}_V df = d(\mathcal{L}_V f) = d(Vf)$ gilt. Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(df \wedge \beta) &= (\mathcal{L}_V df) \wedge \beta + df \wedge (\mathcal{L}_V \beta) \\ &= d(Vf) \wedge \beta + df \wedge (V \lrcorner d\beta + d(V \lrcorner \beta)). \end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir unter Beachtung von $V \lrcorner df = df(V) = Vf$:

$$\begin{aligned} V \lrcorner d(df \wedge \beta) + d(V \lrcorner (df \wedge \beta)) &= V \lrcorner (-df \wedge d\beta) + d((Vf)\beta - df \wedge (V \lrcorner \beta)) \\ &= -(Vf)d\beta + df \wedge (V \lrcorner d\beta) + d(Vf) \wedge \beta + (Vf)d\beta + df \wedge d(V \lrcorner \beta), \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache verwendet haben, dass $V \lrcorner (\omega \wedge \eta) = (V \lrcorner \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (V \lrcorner \eta)$ gilt. Somit ist

$$\mathcal{L}_V(df \wedge \beta) = V \lrcorner d(df \wedge \beta) + d(V \lrcorner (df \wedge \beta))$$

und (13.20) folgt per Induktion. □

Wir erhalten das folgende Korollar.

Folge 13.22 (Lie-Ableitung kommutiert mit d). Wenn V ein glattes Vektorfeld und ω eine glatte Differentialform ist, dann gilt:

$$\mathcal{L}_V(d\omega) = d(\mathcal{L}_V \omega).$$

Proof. Dies folgt aus Cartans Formel und der Tatsache, dass $d \circ d = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V d\omega &= V \lrcorner d(d\omega) + d(V \lrcorner d\omega) = d(V \lrcorner d\omega); \\ d\mathcal{L}_V \omega &= d(V \lrcorner d\omega) + d(d(V \lrcorner \omega)) = d(V \lrcorner d\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Aufgabe 13.23. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V \in \mathfrak{X}(M)$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_V \circ i_V = i_V \circ \mathcal{L}_V$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass $i_V \circ \mathcal{L}_V \omega = i_V(V \lrcorner d\omega)$ für jede glatte Form ω gilt.

Unter Verwendung der invarianten Formel (13.19) für $d\omega$ und Cartans magischer Formel erhalten wir eine weitere Formel für die Lie-Ableitung einer Form.

Vorschlag 13.24. Wenn ω eine glatte k -Form und $X, Y_1, \dots, Y_k$ glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M sind, dann gilt:

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y_1, \dots, Y_k) = X(\omega(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_k). \quad (13.21)$$

14. Integration auf Mannigfaltigkeiten

14.1 Zerlegungen der Eins

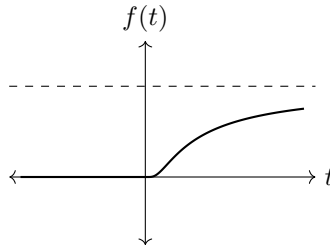
Wir beginnen unsere Diskussion mit einer der wichtigsten Klassen von glatten Funktionen, den sogenannten **Bumpfunktionen** (oder Buckelfunktionen). Rufen Sie sich ins Gedächtnis, dass wir diese Funktionen in unserem Beweis des Tensorcharakterisierungslemmas verwendet haben. Wir beginnen mit der folgenden Tatsache aus der reellen Analysis.

Vorschlag 14.1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (14.1)$$

ist glatt. □

Der Graph der Funktion sieht wie in der folgenden Abbildung aus.



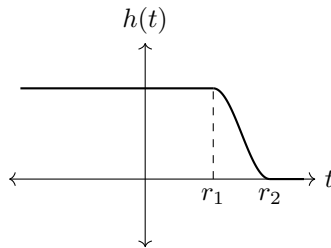
Als Folge davon existiert für beliebige reelle Zahlen r_1 und r_2 mit $r_1 < r_2$ eine glatte Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} h(t) \equiv 1, & t \leq r_1, \\ 0 < h(t) < 1, & r_1 < t < r_2, \\ h(t) \equiv 0, & t \geq r_2 \end{cases}$$

indem wir

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

mit $f(t)$ wie in (14.1) definieren. Ein solches h wird als **Abschneidefunktion** (cutoff function) bezeichnet und sieht wie in der folgenden Abbildung aus.



Wir können diese Konstruktion leicht auf $\mathbb{R}^n$ erweitern, wie das folgende Resultat zeigt.

Vorschlag 14.2. Für beliebige positive reelle Zahlen $r_1 < r_2$ gibt es eine glatte Funktion $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} H(x) \equiv 1, & x \in \overline{B}_{r_1}(0) \\ 0 < H(x) < 1, & x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B}_{r_1}(0) \\ H(x) \equiv 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0). \end{cases} \quad (14.2)$$

Proof. Wir setzen $H(x) = h(|x|)$, wobei h wie oben definiert ist. Offensichtlich ist H glatt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da sie dort eine Komposition glatter Funktionen ist. Da sie auf $B_{r_1}(0)$ identisch gleich 1 ist, ist sie auch dort glatt. □

Die in dieser Proposition konstruierte Funktion H ist ein Beispiel für eine **glatte Bumpfunktion** – eine glatte, reellwertige Funktion, die auf einer vorgegebenen Menge gleich 1 ist und außerhalb einer vorgegebenen Umgebung dieser Menge Null ist.

Wir können nun Zerlegungen der Eins definieren.

Definition 14.3. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine beliebige offene Überdeckung von M . Eine **der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins** ist eine indexierte Familie $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Funktionen $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$ für alle $\alpha \in A$ und alle $x \in M$.
- (ii) $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq U_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$.
- (iii) Die Familie der Träger $(\text{supp } \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich, was bedeutet, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die den Träger $\text{supp } \psi_\alpha$ für nur endlich viele Werte von α schneidet.
- (iv) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist, heißt eine Zerlegung der Eins **glatt**, wenn jede der Funktionen ψ_α glatt ist.

Aufgrund der lokalen Endlichkeitsbedingung (iii) besitzt die Summe in (iv) in einer Umgebung jedes Punktes tatsächlich nur endlich viele von Null verschiedene Terme, sodass keine Konvergenzprobleme auftreten.

Satz 14.4. Angenommen, M ist eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist eine beliebige indexierte offene Überdeckung von M . Dann existiert eine glatte, der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Proof. Jede Menge U_α ist für sich genommen eine glatte Mannigfaltigkeit und besitzt daher eine Basis $\mathcal{B}_\alpha$ aus Koordinatenbällen. Somit ist $\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ eine Basis für die Topologie von M . Da M eine Mannigfaltigkeit ist, besitzt die Überdeckung $\mathcal{U}$ eine abzählbare, lokal endliche Verfeinerung $\{B_i\}$, die aus Elementen von $\mathcal{B}$ besteht, und die Überdeckung $\{\bar{B}_i\}$ ist ebenfalls lokal endlich.

Für jedes i impliziert die Tatsache, dass B_i ein Koordinatenball in einem U_α ist, dass ein Koordinatenball $B'_i \subseteq U_\alpha$ mit $B'_i \supseteq \bar{B}_i$ sowie eine glatte Koordinatenabbildung $\varphi_i : B'_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\varphi_i(\bar{B}_i) = \bar{B}_{r_i}(0)$ und $\varphi_i(B'_i) = B_{r'_i}(0)$ für gewisse $r_i < r'_i$ gilt. Für jedes i definieren wir eine Funktion $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_i = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i & \text{auf } B'_i, \\ 0 & \text{auf } M \setminus \bar{B}_i, \end{cases}$$

wobei $H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die in $B_{r_i}(0)$ positiv und andernorts Null ist, wie in Proposition 14.2. Auf der Menge $B'_i \setminus \bar{B}_i$, wo sich die beiden Definitionen überschneiden, liefern beide Definitionen die Nullfunktion. Daher ist f_i wohldefiniert und glatt, und es gilt $\text{supp } f_i = \bar{B}_i$.

Wir definieren $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_i f_i(x).$$

Aufgrund der lokalen Endlichkeit der Überdeckung $\{\bar{B}_i\}$ besitzt diese Summe in einer Umgebung jedes Punktes nur endlich viele von Null verschiedene Terme und definiert somit eine glatte Funktion. Da jedes f_i überall nicht-negativ und auf B_i positiv ist, und jeder Punkt von M in einem B_i liegt, folgt $f(x) > 0$ überall auf M . Folglich sind die durch $g_i(x) = f_i(x)/f(x)$ definierten Funktionen $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls glatt. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $0 \leq g_i \leq 1$ und $\sum_i g_i \equiv 1$ gelten.

Schließlich müssen wir unsere Funktionen so umindexieren, dass sie durch dieselbe Menge A wie unsere offene Überdeckung indexiert sind. Da die Überdeckung $\{B'_i\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, können wir für jedes i einen Index $a(i) \in A$ so wählen, dass $B'_i \subseteq U_{a(i)}$ gilt. Für jedes $\alpha \in A$ definieren wir $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi_\alpha = \sum_{i: a(i)=\alpha} g_i.$$

Wenn es keine Indizes i gibt, für die $a(i) = \alpha$ gilt, ist diese Summe als die Nullfunktion zu interpretieren. Folglich gilt:

$$\text{supp } \psi_\alpha = \overline{\bigcup_{i: a(i)=\alpha} B_i} = \bigcup_{i: a(i)=\alpha} \bar{B}_i \subseteq U_\alpha.$$

Jedes ψ_α ist eine glatte Funktion, die $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ erfüllt. Zudem ist die Familie der Träger $(\text{supp } \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ nach wie vor lokal endlich und es gilt $\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1$. Dies ist somit die gewünschte Zerlegung der Eins. $\square$

14.2 Top-Formen auf Mannigfaltigkeiten

Es sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Da $\Omega^k(M) = 0$ für $k > n$ gilt, nennen wir jede glatte n -Form eine **Top-Form** auf M . Es sei $p \in M$ und (φ, U) eine lokale Karte um p . Dann ist $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ eine Top-Form auf U . Beachten Sie, dass für jedes $q \in U$ gilt: $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_q \neq 0$, da an jedem $q \in U$

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_q(\partial_1, \dots, \partial_n) = \det(dx^i(\partial_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 1$$

gilt. Da zudem $\dim \Lambda^n T_p^* M = 1$ ist, sehen wir, dass für jede Top-Form ω auf U und jedes $q \in U$ eine reelle Zahl λ_q existiert, so dass

$$\omega_q = \lambda_q(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_q.$$

Da ω von der Klasse C^∞ ist, ist der Koeffizient λ als Funktion auf U ebenfalls C^∞ . Bis auf Multiplikation mit Funktionen gibt es also eine „kanonische Top-Form“ in der Karte. Dies muss global auf M natürlich nicht zutreffen: Für zwei Top-Formen $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$ kann es vorkommen, dass $\omega_p = 0, \omega_q \neq 0$ gilt, während $\eta_p \neq 0, \eta_q = 0$ ist, sodass keine Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $\omega = f\eta$ oder $\eta = f\omega$ existiert.

Insbesondere erhalten wir beim Koordinatenwechsel von $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ zu $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ auf U zwei Top-Formen, nämlich $dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$ und $dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n$. Diese müssen durch eine glatte Funktion auf U miteinander verknüpft sein.

Vorschlag 14.5. Wenn $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um ein Diffeomorphismus ist und $y = \varphi(x)$, dann gilt

$$\varphi^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Proof. Wenn wir $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ schreiben, dann gilt $\varphi^*y^i = y^i \circ \varphi = \varphi^i$. Also:

$$\varphi^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n.$$

Da jedoch

$$d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n(\partial_1^x, \dots, \partial_n^x) = \det(d\varphi_x)$$

gilt, erhalten wir

$$d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n = \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

$\square$

Es seien nun $(\varphi_\alpha, U, V_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, U, V_\beta)$ zwei Koordinatenkarten. Dann ist die Koordinatenwechselabbildung $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, welche $\varphi_\alpha(x)$ auf $y = \varphi_\beta(x)$ abbildet. Wir erhalten also

$$(\varphi_{\alpha\beta})^*(\varphi_\beta^{-1})^* dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) (\varphi_\alpha^{-1})^* dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

Da $(\varphi_{\alpha\beta})^*(\varphi_\beta^{-1})^* = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta})^* = \varphi_\alpha^{-1*}$ gilt, gelangen wir zu

$$dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

14.3 Orientierbarkeit

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\omega \in \Omega^m(M)$ eine glatte m -Form. Wir wollen das Integral $\int_M \omega$ definieren. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass ω ihren Träger in einer Karte (φ, U, V) mit Koordinaten $\{x^1, \dots, x^m\}$ hat. Dann können wir

$$\omega = f(\varphi(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

schreiben, wobei f eine glatte Funktion auf V ist. Mithilfe der euklidischen Differentialform $f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ auf V ist es naheliegend, das Integral wie folgt zu definieren:

$$\int_U \omega := \int_V f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \quad (14.3)$$

Wie üblich muss man dann überprüfen, dass das Integral auf der rechten Seite unabhängig von der Wahl der Koordinatenkarten ist.

Wir betrachten also zwei Koordinatensysteme $(\varphi_\alpha, U, V_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, U, V_\beta)$ auf U mit der Übergangsabbildung $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow V_\beta$, welche $x_\alpha = \varphi_\alpha(x)$ auf $x_\beta = \varphi_\beta(x)$ abbildet. Dann gilt:

$$\omega = f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m.$$

Damit die Definition wohldefiniert ist, benötigen wir also

$$\int_{V_\beta} f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \dots dx_\beta^m = \int_{V_\alpha} f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^m.$$

Unglücklicherweise ist dies nicht immer wahr: Aus der mehrdimensionalen Analysis wissen wir, dass für Integrale von Funktionen mehrerer Variablen

$$\int f(x) dx^1 \dots dx^m$$

gilt: Wenn $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ ein Diffeomorphismus ist, dann gilt die *Transformationsformel* ($y = \varphi(x)$):

$$\int_{V_2} f(x) dy^1 \dots dy^m = \int_{V_1} f(\varphi(x)) |\det(d\varphi)(x)| dx^1 \dots dx^m. \quad (14.4)$$

Um also die Gleichheit

$$\int_{V_\beta} f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \dots dx_\beta^m = \int_{V_\alpha} f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta})(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^m$$

zu garantieren – und damit die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Karten –, müssen wir

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$$

für alle Karten voraussetzen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 14.6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Zwei Karten $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$ heißen **orientierungskompatibel**, wenn die Übergangsabbildung $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ die Bedingung

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta})_p > 0$$

für alle $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ erfüllt.

Eine **Orientierung** von M ist ein Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, dessen Karten paarweise orientierungskompatibel sind.

Wir sagen, M ist **orientierbar**, wenn M eine Orientierung besitzt.

Bemerkung 14.7. Es sei U eine Karte mit Koordinaten $\{x^1, \dots, x^m\}$. Wir verwenden die Notation $-U$, um dieselbe Koordinatenkarte U , jedoch mit „gespiegelten“ Koordinaten $\{-x^1, x^2, \dots, x^m\}$ darzustellen. Dann sind $-U$ und U nicht orientierungskompatibel. Es sei $\tilde{U}$ eine beliebige andere Koordinatenkarte, so dass $\tilde{U} \cap U \neq \emptyset$ zusammenhängend ist. Dann gilt entweder, dass

- $\tilde{U}$ und U orientierungskompatibel sind,

oder, dass

- $\tilde{U}$ und $-U$ orientierungskompatibel sind.

Als Konsequenz sehen wir sofort:

Folge 14.8. Wenn M zusammenhängend und orientierbar ist, dann lässt M genau zwei verschiedene Orientierungen zu.

Beispiel 14.9. Für den reellen projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ haben wir einen Atlas konstruiert, der aus $n+1$ Karten besteht. Wir haben gesehen, dass $\mathbb{RP}^n$ für ungerades n orientierbar ist. Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{RP}^n$ für gerades n nicht orientierbar ist.

14.4 Integration von Top-Formen auf glatten Mannigfaltigkeiten

Wir nehmen nun an, dass M eine glatte, orientierbare m -Mannigfaltigkeit ist, und fixieren eine Orientierung $\mathcal{A}$ auf M . Es sei ω eine beliebige glatte m -Form auf M . Um $\int_M \omega$ zu definieren, nehmen wir zunächst an, dass ω ihren Träger in einer Koordinatenkarte (φ, U, V) hat, die mit der Orientierung $\mathcal{A}$ kompatibel ist. In diesem Fall existiert eine in U unterstützte Funktion f , so dass

$$\omega = f(\varphi(x))dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

In diesem Fall definieren wir einfach

$$\int_U \omega := \int_V f(x)dx^1 \dots dx^m, \quad (14.5)$$

wobei die rechte Seite das Lebesgue-Integral auf $V \subset \mathbb{R}^m$ ist. Wir setzen voraus, dass f integrierbar ist. In dem, was folgt, sind die auftretenden Funktionen f kompakt unterstützt und folglich integrierbar.

Um eine allgemeine m -Form $\omega \in \Omega^m(M)$ zu integrieren, wählen wir eine lokal endliche Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M aus Karten, die mit der Orientierung $\mathcal{A}$ kompatibel sind. Es sei $\{\psi_\alpha\}$ eine dieser Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da jedes ψ_α in U_α unterstützt ist, ist auch jedes $\psi_\alpha \omega$ in U_α unterstützt. Wir definieren:

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega. \quad (14.6)$$

Wir sagen, dass ω **integrierbar** ist, wenn die rechte Seite für jede solche Überdeckung und jede solche Zerlegung der Eins absolut konvergiert. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn ω kompakt unterstützt ist.

Es bleibt zu überprüfen, dass die Definition (14.6) unabhängig von der Wahl der orientierungskompatiblen Koordinatenkarten und unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins ist.

Satz 14.10. *Angenommen, ω ist kompakt unterstützt oder allgemeiner ω ist integrierbar. Der Ausdruck (14.6) ist unabhängig von der Wahl von $\{U_\alpha\}$ und der Wahl von $\{\psi_\alpha\}$.*

Proof. Wir zeigen zuerst, dass (14.5) wohldefiniert ist. Das Argument ist im Wesentlichen dasselbe wie im euklidischen Fall: Wenn ω in U unterstützt ist und wenn $\{x_\alpha^i\}$ und $\{x_\beta^j\}$ zwei orientierungskompatible Koordinatensysteme auf U sind, so dass

$$\omega = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m = f_\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m,$$

dann wollen wir zeigen, dass

$$\int_{V_\alpha} f_\alpha dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^m = \int_{V_\beta} f_\beta dx_\beta^1 \dots dx_\beta^m$$

gilt. Dies ist korrekt, da

$$dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$$

die Beziehung $f_\alpha = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) f_\beta$ impliziert. Da $\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$ ist, folgt das Resultat aus der Transformationsformel im $\mathbb{R}^n$.

Um zu beweisen, dass (14.6) wohldefiniert ist, nehmen wir an, dass $\{U_\alpha\}$ und $\{U_\beta\}$ zwei lokal endliche Überdeckungen von M aus orientierungskompatiblen Karten sind, und $\{\psi_\alpha\}$ bzw. $\{\rho_\beta\}$ untergeordnete Zerlegungen der Eins zu $\{U_\alpha\}$ und $\{U_\beta\}$ sind. Dann ist $\{U_\alpha \cap U_\beta\}$ eine neue lokal endliche Überdeckung von M und $\{\psi_\alpha \rho_\beta\}$ ist eine dieser neuen Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Es genügt zu zeigen, dass

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \psi_\alpha \rho_\beta \omega$$

gilt. Dies ist der Fall, da für jedes feste α gilt:

$$\int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} \left(\sum_\beta \rho_\beta \right) \psi_\alpha \omega = \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \psi_\alpha \rho_\beta \omega.$$

□

14.5 Transformationsformel

Schließlich erweitern wir die Transformationsformel vom $\mathbb{R}^m$ auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 14.11. Es seien M, N orientierbare glatte n -Mannigfaltigkeiten mit den Orientierungen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ heißt **orientierungserhaltend**, wenn für jede Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M orientierungskompatibel mit $\mathcal{A}$ ist.

Angenommen, M und N sind zusammenhängend. Es ist leicht zu sehen, dass ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ genau dann orientierungserhaltend ist, wenn eine Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ existiert, so dass die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M orientierungskompatibel mit $\mathcal{A}$ ist. Falls analog eine Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ existiert, so dass die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M inkompatibel mit $\mathcal{A}$ ist, dann ist für jede Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M inkompatibel mit $\mathcal{A}$. In diesem Fall sagen wir, dass φ **orientierungsumkehrend** ist.

Wir formulieren nun:

Satz 14.12 (Die Transformationsformel). *Angenommen, M, N sind n -dimensionale orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \rightarrow N$ ist ein Diffeomorphismus.*

1. Wenn φ orientierungserhaltend ist, dann gilt

$$\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega.$$

2. Wenn φ orientierungsumkehrend ist, then gilt

$$\int_M \varphi^* \omega = - \int_N \omega.$$

Proof. Es genügt, dies in lokalen Karten zu beweisen, in welchem Fall es sich lediglich um die Transformationsformel im $\mathbb{R}^m$ handelt. $\square$

Bemerkung 14.13. Wenn ω eine kompakt unterstützte k -Form auf M mit $k < m = \dim M$ ist, dann kann man ω nicht über M integrieren. Für jede k -dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit $X \subset M$ kann man jedoch $\int_X \omega$ definieren, indem man es auf $\int_X \iota^* \omega$ setzt, wobei $\iota : X \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Auf diese Weise erhalten wir eine „Paarung“ zwischen k -Formen auf M und k -dimensionalen orientierbaren Untermannigfaltigkeiten in M .

14.6 Volumenform und Volumenmaß

Als Nächstes zeigen wir, dass Orientierbarkeit durch die Existenz bestimmter Top-Formen charakterisiert werden kann:

Satz 14.14. *Eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn M eine nirgends verschwindende glatte m -Form μ zulässt.*

Proof. Es sei zunächst μ eine nirgends verschwindende glatte m -Form auf M . Dann existiert auf jeder lokalen Karte $(U, x^1, \dots, x^m)$ (wobei U stets als zusammenhängend gewählt wird) eine glatte Funktion $f \neq 0$, so dass $\mu = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ gilt. Daraus folgt:

$$\mu(\partial_1, \dots, \partial_m) = f \neq 0.$$

Wir können eine solche Karte um jeden Punkt stets so wählen, dass $f > 0$ gilt, andernfalls ersetzen wir x^1 durch $-x^1$. Angenommen, $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)$ und $(U_\beta, x_\beta^1, \dots, x_\beta^m)$ seien zwei solche Karten, so dass auf dem Schnitt $U_\alpha \cap U_\beta$

$$f dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m = \mu = g dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = g \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$$

gilt, wobei $f, g > 0$ sind. Daraus folgt $\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$. Somit bildet der auf diese Weise konstruierte Atlas eine Orientierung.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ eine Orientierung ist. Für jede lokale Karte U_α in $\mathcal{A}$ setzen wir

$$\mu_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m.$$

Wir wählen eine der offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_\alpha\}$. Wir behaupten, dass

$$\mu := \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \mu_{\alpha}$$

eine nirgends verschwindende glatte m -Form auf M ist. In der Tat existiert für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p , so dass die Summe $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \mu_{\alpha}$ eine endliche Summe $\sum_{i=1}^k \psi_i \mu_i$ ist. Daraus folgt nahe p :

$$\mu(\partial_1^1, \dots, \partial_m^1) = \sum_{i=1}^k (\det d\varphi_{1i}) \psi_i > 0.$$

Sodass $\mu \neq 0$ nahe p gilt. □

Definition 14.15. Eine nirgends verschwindende glatte m -Form μ auf einer m -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M wird als *Volumenform* bezeichnet.

Bemerkung 14.16. Wenn M orientierbar ist und μ eine Volumenform ist, dann werden die beiden Orientierungen von M durch μ bzw. $-\mu$ repräsentiert. Wir bezeichnen die beiden Orientierungen mit $[\mu]$ und $[-\mu]$.

Bemerkung 14.17. Insbesondere lassen sich auf jeder Lie-Gruppe Begriffe wie linksinvariante Differentialformen definieren. Da jede Lie-Gruppe orientierbar ist (**Übung**), existiert auf jeder Lie-Gruppe G eine linksinvariante Volumenform. Die mit einer linksinvarianten Volumenform auf Lie-Gruppen assoziierten Maße werden als **Haar-Maße** bezeichnet.

15. Der Satz von Stokes

15.1 Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir beginnen unsere Diskussion über Mannigfaltigkeiten mit Rand. Es handelt sich dabei um ein Konzept, das dem einer Mannigfaltigkeit fast identisch ist, jedoch lassen wir nun auch Punkte im „Rand“ zu, welche dadurch charakterisiert sind, dass jede Umgebung eines solchen Punktes wie ein Teil eines „Halbraums“ aussieht. Sei

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m \geq 0\}.$$

Wir haben Folgendes:

Definition 15.1. Ein topologischer Raum M heißt eine m -dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn er hausdorffsch und zweitabzählbar ist und wenn für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p existiert, die homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{R}_+^m$ ist. Wir definieren den Rand von M als

$$\partial M = \{p \in M \mid p \text{ besitzt keine Umgebung in } M, \text{ die homöomorph zu } \mathbb{R}^m \text{ ist}\}.$$

Somit gilt $p \in \partial M$ genau dann, wenn p eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}_+^m$ ist, sodass p auf den Rand $\partial \mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m = 0\}$ abgebildet wird. Wir nennen

$$\text{int}(M) = M \setminus \partial M$$

das Innere von M .

Beispiel 15.2. Die abgeschlossene Einheitskugel

$$B^m(1) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\}$$

ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, und ihr Rand ist $\partial B^m(1) = S^{m-1}$.

Lemma 15.3. Wenn M^m eine glatte Mannigfaltigkeit ist, dann induziert die glatte Struktur auf M eine glatte Struktur auf ∂M , die sie zu einer $(m-1)$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit macht.

Proof. Sei $p \in \partial M$ und sei $(U, x^1, \dots, x^m)$ eine Karte aus der glatten Struktur von M , die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}_+^m$ ist. Dann ist

$$U \cap \partial M = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m = 0\},$$

und folglich ist $(U \cap \partial M, x^1, \dots, x^{m-1})$ eine Karte auf ∂M . □

Sei nun M eine orientierbare glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $[\mu]$ eine Orientierung auf M . Dies bedeutet, dass $\mu \in \Omega^m(M)$ nirgendwo verschwindet. Wir erhalten eine induzierte Orientierung auf ∂M . Die induzierte Orientierung auf ∂M ist wie folgt definiert: Angenommen, lokal in der Nähe des Randes gilt

$$\mu = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

mit $f > 0$. Dann definieren wir die induzierte Orientierung auf ∂M lokal als diejenige, die durch die Differentialform

$$\eta = (-1)^m dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m-1} \tag{15.1}$$

repräsentiert wird. Durch die Wahl einer Partition der Eins können wir diese lokalen $(m-1)$ -Formen auf ∂M zu einer globalen, nirgendwo verschwindenden $(m-1)$ -Form auf ∂M zusammenfügen. Die Eigenschaft, dass η nirgendwo verschwindet, folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von μ . Somit erhalten wir aus Theorem 14.14 eine Volumenform, die eine Orientierung auf ∂M definiert, welche von der Orientierung auf M induziert wird.

Wir erklären, warum η in (15.1) diese Form hat. Beachte, dass in Koordinatenkarten nahe dem Rand M durch $x^m \geq 0$ definiert ist. Also ist $-x^m$ die „nach außen zeigende Normale“ von M , und diese Randorientierung ist so gewählt, dass gilt:

$$d(-x^m) \wedge \eta = d(-x^m) \wedge (-1)^m dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m-1} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

15.2 Der Satz von Stokes

Nun können wir unseren Hauptsatz formulieren und beweisen:

Satz 15.4 (Satz von Stokes). Sei M eine glatte orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und der induzierten Orientierung. Für jede $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger gilt

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \int_M d\omega, \quad (15.2)$$

wobei $\iota_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung ist.

Proof. Der Beweis ergibt sich aus den folgenden drei Fällen, die wir einzeln behandeln: (1) ω hat seinen Träger in einer Karte U , die diffeomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist. (2) ω hat seinen Träger in einer Karte U , die diffeomorph zu $\mathbb{R}_+^m$ ist. (3) Der allgemeine Fall.

Fall (1): Da $\omega = 0$ auf ∂M gilt, ist $\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = 0$. Um $\int_M d\omega$ zu berechnen, setzen wir

$$\omega = \sum_i (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

wobei die f_i glatte Funktionen mit kompaktem Träger sind. Dann haben wir unter Verwendung der Formel für die äußere Ableitung:

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Nach Definition folgt:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^m \\ &\stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \sum_i \int \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^m \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \sum_i \int \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\lim_{s \rightarrow \infty} f_i(s) - \lim_{s \rightarrow -\infty} f_i(s) \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^m \\ &= 0, \end{aligned}$$

da f_i einen kompakten Träger hat. Damit ist (15.2) in Fall 1 wahr.

Fall (2): Wir haben dieselbe Formel zur Berechnung von $\int_M d\omega$, mit Ausnahme des Terms für $i = m$, da in diesem Fall eine der Grenzen 0 statt $-\infty$ ist. Wir haben

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f_m}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1}.$$

Andererseits sehen wir, da $x^m = 0$ auf ∂M gilt:

$$\iota_{\partial M}^* \omega = (-1)^{m-1} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} = -f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) \cdot (-1)^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}.$$

Also

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (-f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0)) dx^1 \cdots dx^{m-1} = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1} = \int_M d\omega,$$

was (15.2) entspricht.

Fall (3): Im Allgemeinen überdecken wir die kompakte Menge $\text{supp}(\omega)$ mit endlich vielen Koordinatenkarten und wählen eine Partition der Eins $\{\psi_i\}$, die dieser Überdeckung untergeordnet ist. Dann gilt

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \sum_i \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* (\psi_i \omega) \stackrel{\text{Stokes in einer Karte}}{=} \sum_i \int_M d(\psi_i \omega) = \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \int_M d\omega = \int_M d\omega,$$

da

$$\sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega = \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega = 0.$$

□

Wir sehen einige einfache Konsequenzen:

1. Sei $M = [a, b]$ und $\omega = f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$. Dann ist

$$\int_M df = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = \int_{\partial[a,b]} f = f(b) - f(a).$$

“

2. Wenn $\partial M = \emptyset$, dann gilt für jede $(m-1)$ -Form ω mit kompaktem Träger $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0$. Zum Beispiel gilt für jede glatte Funktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dass $\int_{S^1} df = 0$.
3. **Satz von Green:** Sei D ein kompaktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und $P, Q \in C^\infty(D)$. Dann gilt

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

References

- [Bär] Christian Bär. “Lecture notes on Differential Geometry” (). URL: https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Geometrie/Dokumente/Lehre/Lehrmaterialien/DiffGeo.pdf (cit. on p. 1).
- [Ker60] Michel A. Kervaire. “A manifold which does not admit any differentiable structure”. English. *Comment. Math. Helv.* 34 (1960), pp. 257–270. Zbl: 0145.20304. URL: <https://eudml.org/doc/139196> (cit. on p. 12).
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. English. 2nd revised ed. Vol. 218. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer, 2013. Zbl: 1258.53002 (cit. on p. 1).
- [Tu11] Loring W. Tu. *An introduction to manifolds. 2nd revised ed.* English. 2nd ed. Universitext. New York, NY: Springer, 2011. Zbl: 1200.58001 (cit. on p. 1).
- [Wal] Thomas Walpuski. *Lecture notes on Differential Geometry*. URL: <https://walpu.ski/Teaching/WS2021/DifferentialGeometry/DifferentialGeometry.pdf> (cit. on p. 1).
- [Wen] Chris Wendl. “Differential Geometry 12”. *Lecture Notes* () (cit. on p. 1).