

Betrachten wir einige *Nicht-Beispiele* glatter Einbettungen. Im Folgenden geben wir einige Beispiele, in denen eines der Kriterien für eine glatte Einbettung fehlschlägt.

Beispiel 7.18 (Eine glatte topologische Einbettung). Die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\gamma(t) = (t^3, 0)$, ist eine glatte Abbildung und eine topologische Einbettung, aber sie ist keine glatte Einbettung. Die Abbildung γ ist glatt und eine topologische Einbettung, denn

$$\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

was die x -Achse in \mathbb{R}^2 ist. Die Umkehrabbildung vom Bild $\gamma(\mathbb{R})$ nach \mathbb{R} ist gegeben durch

$$\gamma^{-1}(x, 0) = \sqrt[3]{x}.$$

Da $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ stetig ist, ist γ^{-1} stetig. Daher ist γ ein Homöomorphismus von \mathbb{R} auf sein Bild, also eine topologische Einbettung.

Aber γ ist keine glatte Einbettung, denn

$$\gamma'(t) = (3t^2, 0).$$

Insbesondere gilt bei $t = 0$

$$\gamma'(0) = (0, 0).$$

Somit ist das Differential

$$d\gamma_0 : T_0\mathbb{R} \rightarrow T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$$

die Nullabbildung, also nicht injektiv.

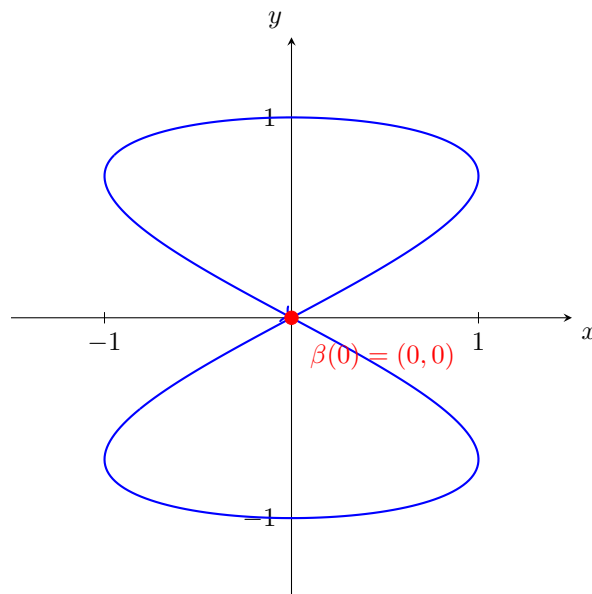
Beispiel 7.19 (Die Acht-Kurve). Betrachte die Kurve $\beta : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t).$$

Ihr Bild sieht wie eine Acht in der Ebene aus, siehe die Abbildung unten. Wir zeigen, dass β keine glatte Einbettung ist. Es gilt

$$\beta'(t) = (2 \cos 2t, \cos t),$$

und daher gilt $\beta'(t) \neq 0$ für alle $t \in (-\pi, \pi)$, denn bei $t = \frac{\pi}{2}$ gilt $\beta'(\frac{\pi}{2}) = (2 \cos \pi, \cos \frac{\pi}{2}) = (-2, 0) \neq 0$. Und bei $t = 0$ gilt $\beta'(0) = (2, 1) \neq 0$.



Wir überprüfen, dass β kein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Die Umkehrabbildung $\beta^{-1} : \beta((-\pi, \pi)) \rightarrow (-\pi, \pi)$ ist **nicht stetig**. Beachte zunächst, dass

$$\beta(0) = (\sin 0, \sin 0) = (0, 0).$$

Definiere nun die Folge

$$t_n = \pi - \frac{1}{n} \in (-\pi, \pi), \quad n \geq 2.$$

Dann gilt $t_n \rightarrow \pi$ für $n \rightarrow \infty$, und

$$\begin{aligned} \sin 2t_n &= \sin\left(2\pi - \frac{2}{n}\right) = -\sin \frac{2}{n} \rightarrow 0, \\ \sin t_n &= \sin\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\beta(t_n) = \left(-\sin \frac{2}{n}, \sin \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0, 0) = \beta(0) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Also gilt $\beta(t_n) \rightarrow \beta(0)$ in der Teilraumtopologie auf $\beta((-\pi, \pi))$.

Wäre β^{-1} stetig, so müsste gelten

$$\beta^{-1}(\beta(t_n)) = t_n \longrightarrow \beta^{-1}(0, 0) = 0.$$

Aber $t_n \rightarrow \pi \neq 0$. Daher ist β^{-1} bei $(0, 0)$ nicht stetig, also ist β kein Homöomorphismus auf sein Bild.

Beispiel 7.20. Sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der 2-Torus, und sei α eine beliebige irrationale Zahl. Die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, gegeben durch

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}),$$

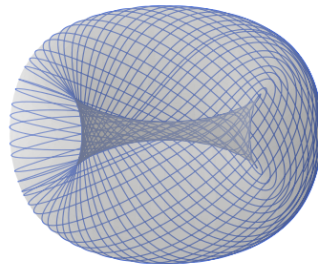
ist eine glatte Immersion, da $\gamma'(t)$ niemals verschwindet. Sie ist auch injektiv, denn $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ impliziert, dass sowohl $t_1 - t_2$ als auch $\alpha t_1 - \alpha t_2$ ganze Zahlen sind, was unmöglich ist, außer wenn $t_1 = t_2$ gilt. Allerdings ist γ kein Homöomorphismus auf sein Bild. Um dies zu sehen, sei $\varepsilon > 0$. Dann können wir $n, m \in \mathbb{Z}$ finden mit $|\alpha n - m| < \varepsilon$. Somit gilt

$$\begin{aligned} |\gamma(n) - \gamma(0)| &= |(e^{2\pi i n}, e^{2\pi i \alpha n}) - (1, 1)| \\ &= |(1, e^{2\pi i \alpha n}) - (1, 1)| \\ &\leq |e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i m}| \\ &\leq |2\pi(\alpha n - m)| \\ &\leq 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Daher gilt $\gamma(0) \in \overline{\gamma(\mathbb{Z})}$, aber \mathbb{Z} hat keinen Häufungspunkt in \mathbb{R} .

Natürlich ist γ für $\alpha \in \mathbb{Q}$ nicht einmal injektiv.

Dense curve on \mathbb{T}^2 : $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$



7.4 Untermannigfaltigkeiten

Wie der Name andeutet, sollten Untermannigfaltigkeiten Teile einer Mannigfaltigkeit sein, die selbst Mannigfaltigkeiten sind. Dies ist der Begriff, den wir in diesem Abschnitt präzisieren wollen. Wir werden zwei Möglichkeiten angeben, eine Untermannigfaltigkeit zu definieren. Erinnern wir uns zunächst aus der linearen Algebra daran, dass ein linearer Unterraum eines Vektorraums, zum Beispiel

$$\mathbb{R}^\ell \times \{0\} = \{(x^1, \dots, x^\ell, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid (x^1, \dots, x^\ell) \in \mathbb{R}^\ell\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (7.6)$$

definitiv selbst eine Mannigfaltigkeit ist und tatsächlich das typische Beispiel einer Untermannigfaltigkeit darstellt. In der Tat sieht jeder ℓ -dimensionale Unterraum eines n -dimensionalen Vektorraums nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation wie (7.6) aus. Der Begriff der glatten Untermannigfaltigkeit verallgemeinert diese Idee. Wir beginnen zunächst mit der folgenden Definition.

Definition 7.21 (Schnittkarten). Eine Karte (U, ϕ) auf einer n -Mannigfaltigkeit M heißt eine **ℓ -dimensionale Schnittkarte** für eine Teilmenge $L \subset M$, falls

$$L \cap U = x^{-1}(\mathbb{R}^\ell \times \{0\}),$$

d.h. die Punkte in U gehören genau dann zu L , wenn ihre Koordinaten $x^{\ell+1}, \dots, x^n$ verschwinden.

Definition 7.22. Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $L \subset M$ heißt eine **ℓ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit** von M , falls M eine Sammlung glatter Schnittkarten für L besitzt, deren Definitionsbereiche jeden Punkt von L überdecken.

Beispiel 7.23. Wenn wir Polarkoordinaten zur Beschreibung der glatten Struktur auf $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit den beiden Karten (U, θ) und (V, ϕ) verwenden, wobei $\theta(U) = (0, 2\pi)$ und $\phi(V) = (-\pi, \pi)$ gilt, dann sind diese beiden Koordinaten auf offenen Teilmengen von S^1 definiert, besitzen aber auch natürliche Erweiterungen auf offene Teilmengen von \mathbb{R}^2 , nämlich

$$\mathcal{U}' := \{tv \in \mathbb{R}^2 \mid v \in U, t > 0\}, \quad \mathcal{V}' := \{tv \in \mathbb{R}^2 \mid v \in V, t > 0\}.$$

Erinnern wir uns daran, dass eine **1-dimensionale Schnittkarte** für $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine Karte $(\mathcal{U}', (x^1, x^2))$ auf \mathbb{R}^2 ist, sodass ein Punkt von \mathcal{U}' genau dann auf S^1 liegt, wenn $x^2 = 0$.

Definiere die radialen und Winkelkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie üblich und setze

$$\rho := r - 1 \quad \text{sodass} \quad S^1 = \{r = 1\} = \{\rho = 0\}.$$

Definiere

$$\mathcal{U}' = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \cup \{(x, 0) \mid x > 0\}).$$

Dies ist \mathbb{R}^2 ohne den Ursprung und ohne die positive x -Achse. Die Koordinatenabbildung ist

$$(\theta, \rho) : \mathcal{U}' \rightarrow (0, 2\pi) \times (-1, \infty),$$

wobei $\theta \in (0, 2\pi)$ der Polarwinkel ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Dann gilt

$$S^1 \cap \mathcal{U}' = (\theta, \rho)^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}),$$

da $\rho = 0 \iff r = 1$. Ebenso gilt

$$\mathcal{V}' = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \cup \{(x, 0) \mid x < 0\}).$$

Dies ist \mathbb{R}^2 ohne den Ursprung und ohne die **negative** x -Achse. Die Koordinatenabbildung ist

$$(\phi, \rho) : \mathcal{V}' \rightarrow (-\pi, \pi) \times (-1, \infty),$$

wobei $\phi \in (-\pi, \pi)$ der Polarwinkel ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Dann gilt

$$S^1 \cap \mathcal{V}' = (\phi, \rho)^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\}).$$

Also gilt $S^1 \subset U' \cup V'$, und die beiden Schnittkarten überdecken jeden Punkt von S^1 . Dies bestätigt, dass S^1 eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist.

Beweisen wir nun, dass eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit auch selbst eine Mannigfaltigkeit ist.

Vorschlag 7.24. Ist L eine ℓ -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit einer n -dimensionalen C^k -Mannigfaltigkeit M , dann erbt L auf natürliche Weise von M die Struktur einer ℓ -dimensionalen C^k -Mannigfaltigkeit, sodass die Inklusionsabbildung $i : L \hookrightarrow M$ von der Klasse C^k ist. Außerdem ist für jedes $p \in L$ der Tangentialraum $T_p L$ auf natürliche Weise ein ℓ -dimensionaler linearer Unterraum von $T_p M$.

Proof. Wir ordnen jeder Schnittkarte (U, x) für $L \subset M$ eine Karte der Form $(U \cap L, x_L)$ auf L zu, wobei wir die Koordinatenprojektion

$$\pi_\ell(x^1, \dots, x^n) := (x^1, \dots, x^\ell)$$

verwenden, um

$$x_L = \pi_\ell \circ x|_{U \cap L} : U \cap L \rightarrow \mathbb{R}^\ell$$

zu definieren. Da L eine Untermannigfaltigkeit ist, kann L durch Schnittkarten überdeckt werden, und daher definiert die Sammlung aller Karten dieser Form einen Atlas auf L . Wir überprüfen nun die Kompatibilitätsbedingungen. Gegeben seien zwei solche Karten $(U \cap L, x_L)$ und $(V \cap L, y_L)$, die von zwei C^k -kompatiblen Schnittkarten (U, x) und (V, y) stammen. Die Übergangsabbildung $y \circ x^{-1}$ erhält den Unterraum $\mathbb{R}^\ell \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, und ihre Einschränkung auf den Schnitt ihres Definitionsbereichs mit diesem Unterraum ist die Übergangsabbildung $y_L \circ x_L^{-1}$. Diese ist daher von der Klasse C^k , da $y \circ x^{-1}$ von der Klasse C^k ist. Ebenso folgen die Zweite Abzählbarkeit und die Hausdorff-Eigenschaft für L aus den entsprechenden Eigenschaften von M , und somit ist L eine C^k -Mannigfaltigkeit. Die Inklusionsabbildung $i : L \hookrightarrow M$ sieht bezüglich jeder Schnittkarte (U, x) und der zugehörigen Karte $(U \cap L, x_L)$ auf L wie

$$(x^1, \dots, x^\ell) \mapsto (x^1, \dots, x^\ell, 0, \dots, 0)$$

aus. Dies ist offensichtlich glatt, also ist die Inklusion von der Klasse C^k .²

Für jedes $p \in L$ ist die Tangentialabbildung $di_p : T_p L \rightarrow T_p M$ einfach die kanonische Inklusion $T_p L \hookrightarrow T_p M$, die dadurch definiert ist, dass man jede Kurve in L als Kurve in M auffasst. Da ihr Bild ein linearer Unterraum ist, liefert sie einen kanonischen Isomorphismus von $T_p L$ auf einen linearen Unterraum von $T_p M$. \square

Somit ist eine Untermannigfaltigkeit $L \subset M$ eine Mannigfaltigkeit, und von nun an werden wir annehmen, dass L mit der in Proposition 7.24 beschriebenen differenzierbaren Struktur versehen ist.

Aufgabe 7.25. Angenommen, M und N sind beide C^k -Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ ist eine Abbildung der Klasse C^k . Beweise:

- Für jede C^k -Untermannigfaltigkeit $L \subset M$ ist die Einschränkung $f|_L : L \rightarrow N$ ebenfalls eine Abbildung der Klasse C^k .
- Ist $L \subset N$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit mit $f(M) \subset L$, dann ist die resultierende Abbildung $f : M \rightarrow L$ ebenfalls von der Klasse C^k .

7.5 Einbettungen und Niveaumengen

Wir versuchen nun, die Beziehung zwischen Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten zu verstehen. Dies wird uns auch ermöglichen, viele weitere Beispiele von Untermannigfaltigkeiten zu erzeugen. Das Hauptergebnis in dieser Richtung ist das folgende.

Satz 7.26. Ist $f : M \rightarrow N$ eine Einbettung, dann ist ihr Bild $f(M)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von N .

²Erinnern wir uns daran, dass es, wenn sowohl L als auch M Mannigfaltigkeiten der Klasse C^k mit $k < \infty$ sind, keinen Sinn ergibt zu sagen, dass die Inklusion $L \hookrightarrow M$ glatt ist, auch wenn sie in den speziellen lokalen Koordinaten, die wir gewählt haben, glatt aussieht. Der Punkt ist, dass man auch andere Koordinaten wählen könnte, in denen sie immer noch wie eine Abbildung der Klasse C^k aussieht, aber nicht notwendigerweise wie eine Abbildung der Klasse C^∞ .

Proof. Wir wollen Schnittkarten für $f(M) \subset N$ konstruieren. Sei $q \in f(M)$. Da f injektiv ist, gibt es einen eindeutigen Punkt $p \in M$ mit $f(p) = q$. Da f eine Immersion ist, liefert der Rangsatz 7.11 Karten (\mathcal{U}, x) auf M und (\mathcal{V}, y) auf N mit $x(p) = 0$ und $y(q) = 0$, sodass $y \circ f \circ x^{-1}$ die Form $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$ hat. Da die Umkehrabbildung $f(M) \rightarrow M$ ebenfalls stetig ist, dürfen wir nach eventuellem Verkleinern von $\mathcal{V} \subset N$ zu einer kleineren Umgebung von q annehmen, dass

$$f^{-1}(\mathcal{V} \cap f(M)) \subset \mathcal{U},$$

oder mit anderen Worten, dass $\mathcal{V} \cap f(M) = f(\mathcal{U})$ gilt. Dies zeigt, dass (\mathcal{V}, y) eine Schnittkarte für die Teilmenge $f(M)$ ist. □

Tatsächlich können wir als Korollar des vorherigen Satzes eine alternative Definition des Begriffs einer Untermannigfaltigkeit geben.

Folge 7.27. Eine Teilmenge $L \subset M$ einer glatten Mannigfaltigkeit M ist genau dann eine glatte Untermannigfaltigkeit, wenn sie eine glatte Struktur besitzt, bezüglich derer die Inklusionsabbildung $L \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung ist. □

Wir betrachten nun die Beziehungen zwischen Submersionen und Untermannigfaltigkeiten. Wir treffen die folgende Definition.

Definition 7.28. Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $p \in M$ heißt ein **regulärer Punkt** von f , wenn f bei p eine Submersion ist, und andernfalls ein **kritischer Punkt**. Ein Punkt $q \in N$ heißt ein **kritischer Wert** von f , wenn $q = f(p)$ für einen kritischen Punkt p gilt; andernfalls heißt q ein **regulärer Wert** von f .

Satz 7.29. Für jede glatte Abbildung $f : M^m \rightarrow N^n$ mit regulärem Wert $q \in N$ ist $L := f^{-1}(q) \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit $\dim L = \dim M - \dim N$, und der Tangentialraum an jedem Punkt $p \in L$ ist $T_p L = \ker df_p \subset T_p M$.

Proof. Wir möchten Schnittkarten für L finden. Für jedes $p \in L = f^{-1}(q)$ ist f nach Voraussetzung eine Submersion bei p . Daher liefert Theorem 7.11 Karten x in einer Umgebung von p und y in einer Umgebung von q , sodass $x(p)$ und $y(q)$ jeweils der Ursprung in den entsprechenden euklidischen Räumen sind und $y \circ f \circ x^{-1}$ zu der Abbildung $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ wird. Die Nullmenge dieser Abbildung ist, in den x -Koordinaten betrachtet, eine Umgebung von p in $f^{-1}(q)$; somit ist x eine Schnittkarte.

Wir betrachten nun den Tangentialraum und beweisen, dass $T_p L = \ker df_p$ gilt. Beachte zunächst, dass für jede Kurve γ in L durch p die zusammengesetzte Kurve $f \circ \gamma$ eine konstante Kurve bei $q \in N$ ist. Daher gilt $df_p([\dot{\gamma}]) = 0 \in T_q N$, was $T_p L \subset \ker df_p$ beweist. Da q ein regulärer Wert ist, ist $df_p : T_p M \rightarrow T_q N$ surjektiv. Daraus folgt mit dem Rangsatz beziehungsweise dem Dimensionssatz

$$\dim T_p L = \dim L = \dim M - \dim N = \dim T_p M - \dim T_q N = \dim \ker T_p f.$$

□

Definition 7.30. Untermannigfaltigkeiten der Form $f^{-1}(q) \subset M$ für reguläre Werte $q \in N$ heißen **reguläre Niveaumengen** von f .

Somit zeichnet sich eine Submersion $f : M \rightarrow N$ dadurch aus, dass *alle* ihre Niveaumengen regulär und daher glatte Untermannigfaltigkeiten sind.

Tatsächlich beweist der Beweis von Theorem 7.29 auch das folgende Resultat über Abbildungen konstanten Ranges.

Satz 7.31 (Niveaumengensatz für konstanten Rang). Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, sodass f konstanten Rang r hat. Dann sind die Niveaumengen von f , d.h. $f^{-1}(q) \subset M$ für $q \in N$, glatte Untermannigfaltigkeiten von M der Dimension $m - r$.

Wir haben nun eine *sehr* einfache Möglichkeit zu beweisen, dass einfache Beispiele wie die Einheitskugeln $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tatsächlich glatte Untermannigfaltigkeiten sind.

Beispiel 7.32. Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mithilfe des standardmäßigen euklidischen Skalarprodukts durch $f(x) = |x|^2 = \langle x, x \rangle$. Dies ist eine glatte Abbildung, deren Differential an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch $d_x f(v) = 2\langle x, v \rangle$ gegeben ist. Daher ist sie überall außer am Ursprung eine Submersion. Dies macht $S^n = f^{-1}(1)$ zu einer glatten Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n+1) - 1 = n$. Insbesondere erbt S^n eine natürliche glatte Struktur, bezüglich derer die Inklusion $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Einbettung ist. Der Kern von $d_x f$ an einem Punkt $x \in S^n$ ist das orthogonale Komplement von x , also

$$T_x S^n = x^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Beispiel 7.33. Die glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$ hat genau einen kritischen Punkt, nämlich bei $(x, y) = (0, 0)$. Daher ist $f^{-1}(t)$ für jedes $t \neq 0$ eine glatte Untermannigfaltigkeit (eine Hyperbel), und ebenso ist $f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0)\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Die Menge $f^{-1}(0)$ ist jedoch am Ursprung keine Untermannigfaltigkeit.