

Aufgabe 7.5. Zeigen Sie, dass eine Verkettung glatter Submersionen eine glatte Submersion ist, und dass eine Verkettung glatter Immersionen eine glatte Immersion ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um zu zeigen, dass eine Verkettung von Abbildungen konstanten Ranges nicht notwendigerweise konstanten Rang haben muss.

Wir haben bereits die Definition eines glatten lokalen Diffeomorphismus gesehen. Außerdem haben wir gesehen, dass, wenn $f: M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, die lineare Abbildung $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus ist. Die Umkehrung dieser Aussage ist ebenfalls wahr und ist als der **Satz über die inverse Funktion** bekannt.

Satz 7.6 (Satz über die inverse Funktion für Mannigfaltigkeiten). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $p \in M$ ein Punkt, sodass df_p ein Isomorphismus ist, dann gibt es Umgebungen U_0 von p und V_0 von $f(p)$, sodass $f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus ist.

Proof. Die Tatsache, dass df_p bijektiv ist, impliziert, dass M und N dieselbe Dimension haben, sagen wir n . Wähle glatte Karten (U, φ) mit Zentrum in p und (V, ψ) mit Zentrum in $f(p)$, wobei $f(U) \subseteq V$ gilt. Dann ist $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine glatte Abbildung von der offenen Teilmenge $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\hat{V} = \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $\hat{f}(p) = 0$. Da φ und ψ Diffeomorphismen sind, ist das Differential

$$d\hat{f}_0 = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d(\varphi^{-1})_0$$

nichtsingulär. Der Satz über die inverse Funktion für euklidische Räume impliziert, dass es zusammenhängende offene Teilmengen $\hat{U}_0 \subseteq \hat{U}$ und $\hat{V}_0 \subseteq \hat{V}$ gibt, die 0 enthalten, sodass \hat{f} sich zu einem Diffeomorphismus von \hat{U}_0 nach \hat{V}_0 einschränkt. Dann sind $U_0 = \varphi^{-1}(\hat{U}_0)$ und $V_0 = \psi^{-1}(\hat{V}_0)$ zusammenhängende Umgebungen von p beziehungsweise $f(p)$, und durch Komposition folgt, dass $f|_{U_0}$ ein Diffeomorphismus von U_0 nach V_0 ist. \square

Das nächste Resultat zeigt den Zusammenhang zwischen Immersionen, Submersionen und lokalen Diffeomorphismen.

Vorschlag 7.7. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

1. f ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn f sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion ist.
2. Falls $\dim M = \dim N$ gilt und f entweder eine glatte Immersion oder eine glatte Submersion ist, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus.

Proof. Angenommen zunächst, dass f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Für ein gegebenes $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p , sodass f ein Diffeomorphismus von U auf $f(U)$ ist und

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

ein Isomorphismus ist. Also gilt

$$\text{rank } f = \dim M = \dim N,$$

und somit ist f sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion. Umgekehrt gilt: Ist f sowohl eine glatte Immersion als auch eine glatte Submersion, dann ist df_p für jedes $p \in M$ ein Isomorphismus, und der Satz über die inverse Funktion, Theorem 7.6, zeigt, dass p eine Umgebung besitzt, auf der sich f zu einem Diffeomorphismus auf sein Bild einschränkt. Damit ist 1 bewiesen.

Um 2 zu beweisen, beachte, dass, wenn M und N dieselbe Dimension haben, entweder die Injektivität oder die Surjektivität von df_p bereits die Bijektivität impliziert. Also ist f genau dann eine glatte Submersion, wenn f eine glatte Immersion ist, und somit folgt 2 aus 1. \square

7.2 Der Rangsatz

Wir betrachten Beispiele einer Submersion und einer Immersion.

Beispiel 7.8. Kanonische Projektion $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m > n$

$$\pi(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

ist eine Submersion. Das Differential an jedem Punkt p ist die lineare Abbildung

$$d\pi_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

dargestellt durch die $n \times m$ -Matrix

$$d\pi_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix hat überall Rang n , also gilt

$$d\pi_p \text{ ist surjektiv} \implies \pi \text{ ist eine Submersion.}$$

Beachte außerdem, dass jede Faser

$$\pi^{-1}(c) \cong \mathbb{R}^{m-n}$$

ein affiner Unterraum ist.

Beispiel 7.9. Die kanonische Inklusion $\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ **mit** $m < n$

$$\iota(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

ist eine Immersion. Das Differential an jedem Punkt p ist

$$d\iota_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Dies ist eine $n \times m$ -Matrix von Rang m überall, also gilt

$$d\iota_p \text{ ist injektiv.}$$

Die wichtigste Tatsache über Abbildungen konstanten Ranges ist die folgende Konsequenz des Satzes über die inverse Funktion. Sie besagt, dass eine glatte Abbildung konstanten Ranges lokal durch einen Koordinatenwechsel in eine besonders einfache kanonische Form gebracht werden kann. In diesem Sinne sind die oben angegebenen Beispiele von Submersionen und Immersionen die Modellbeispiele.

Wir erinnern zunächst an das folgende Resultat über die kanonische Form surjektiver linearer Abbildungen.

Satz 7.10 (Kanonische Form einer linearen Abbildung). *Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume, und sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung vom Rang r . Dann gibt es Basen von V und W , bezüglich derer T die folgende Matrixdarstellung besitzt:*

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei I_r die $r \times r$ -Einheitsmatrix ist.

Satz 7.11 (Rangsatz). *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m beziehungsweise n , und sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung konstanten Ranges r . Für jedes $p \in M$ gibt es glatte Karten $(U, \varphi) \ni p$ für M und $(V, \psi) \ni F(p)$ für N , sodass $F(U) \subseteq V$ gilt und F in diesen Karten eine Koordinatendarstellung der Form*

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \tag{7.1}$$

besitzt. Ist F eine glatte Submersion, dann wird die Darstellung zu

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n), \tag{7.2}$$

und ist F eine glatte Immersion, dann lautet sie

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0). \tag{7.3}$$

Proof. Da der Satz lokal ist, können wir nach Wahl glatter Koordinaten M und N durch offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ersetzen. Da $DF(p)$ Rang r hat, besitzt seine Matrixdarstellung eine $r \times r$ -Untermatrix mit nichtverschwindender Determinante. Durch Umordnung der Koordinaten nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass dies die linke obere Untermatrix

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right), \quad i, j = 1, \dots, r,$$

ist. Wir schreiben die Standardkoordinaten auf \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n als

$$(x, y) = (x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^{m-r})$$

in \mathbb{R}^m und

$$(v, w) = (v^1, \dots, v^r, w^1, \dots, w^{n-r})$$

in \mathbb{R}^n . Durch anfängliche Translationen der Koordinaten können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$p = (0, 0) \quad \text{und} \quad F(p) = (0, 0)$$

gilt.

Schreiben wir

$$F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$$

für glatte Abbildungen

$$Q: U \rightarrow \mathbb{R}^r \quad \text{und} \quad R: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-r},$$

dann besagt unsere Voraussetzung, dass

$$\left(\frac{\partial Q^i}{\partial x^j} \right)$$

in $(0, 0)$ nichtsingulär ist.

Definiere $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$\varphi(x, y) = (Q(x, y), y).$$

Ihr totales Differential in $(0, 0)$ ist

$$D\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0, 0) & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0, 0) \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix},$$

wobei δ_j^i das **Kronecker-Delta** ist, definiert durch

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Die Matrix $D\varphi(0, 0)$ ist nichtsingulär, da der Block

$$\frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0, 0)$$

in $(0, 0)$ nichtsingulär ist und der zweite Diagonalblock gerade die Einheitsmatrix ist. Daher gibt es nach dem Satz über die inverse Funktion, Theorem 7.6, zusammenhängende Umgebungen U_0 von $(0, 0)$ und \tilde{U}_0 von

$$\varphi(0, 0) = (0, 0),$$

sodass

$$\varphi: U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$$

ein Diffeomorphismus ist. Durch eventuelles Verkleinern von U_0 und \tilde{U}_0 können wir annehmen, dass \tilde{U}_0 ein offener Würfel ist.

Schreiben wir die inverse Abbildung als

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

für glatte Funktionen

$$A: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^r \quad \text{und} \quad B: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-r},$$

dann berechnen wir

$$(x, y) = \varphi(A(x, y), B(x, y)) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y)). \quad (7.4)$$

Durch Vergleich der y -Komponenten erhält man

$$B(x, y) = y.$$

Daher hat φ^{-1} die Form

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), y).$$

Andererseits impliziert

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id},$$

dass

$$Q(A(x, y), y) = x.$$

Daher hat $F \circ \varphi^{-1}$ die Form

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, \tilde{R}(x, y)),$$

wobei

$$\tilde{R}: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$$

definiert ist durch

$$\tilde{R}(x, y) = R(A(x, y), y).$$

Die Jacobi-Matrix dieser zusammengesetzten Abbildung an einem beliebigen Punkt $(x, y) \in \tilde{U}_0$ ist

$$D(F \circ \varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial x^j}(x, y) & \frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Da die Komposition mit einem Diffeomorphismus den Rang einer Abbildung nicht ändert, hat diese Matrix überall in \tilde{U}_0 Rang r , weil F nach Voraussetzung Rang r hat und φ^{-1} ein Diffeomorphismus ist. Die ersten r Spalten sind offensichtlich linear unabhängig. Also kann der Rang nur dann r sein, wenn die Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{R}^i}{\partial y^j}$$

auf \tilde{U}_0 identisch verschwinden. Dies impliziert, dass \tilde{R} tatsächlich unabhängig von

$$(y^1, \dots, y^{m-r})$$

ist. Setzen wir also

$$S(x) = \tilde{R}(x, 0),$$

dann erhalten wir

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, S(x)). \quad (7.5)$$

Wir schließen den Beweis ab, indem wir eine geeignete glatte Karte in einer Umgebung von $(0, 0) \in V$ definieren. Sei

$$V_0 \subseteq V$$

die offene Teilmenge

$$V_0 = \{(v, w) \in V : (v, 0) \in \tilde{U}_0\}.$$

Dann ist V_0 eine Umgebung von $(0, 0)$. Da \tilde{U}_0 ein Würfel ist und $F \circ \varphi^{-1}$ die Form (7.5) hat, folgt

$$F \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}_0) \subseteq V_0,$$

und somit

$$F(U_0) \subseteq V_0.$$

Definiere

$$\psi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$\psi(v, w) = (v, w - S(v)).$$

Dies ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild, denn seine Umkehrabbildung ist explizit gegeben durch

$$\psi^{-1}(s, t) = (s, t + S(s)).$$

Also ist (V_0, ψ) eine glatte Karte. Aus (7.5) folgt

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = \psi(x, S(x)) = (x, S(x) - S(x)) = (x, 0),$$

was zu zeigen war. □

Das nächste Korollar kann als eine invariant formulierte Version des Rangsatzes betrachtet werden. Es besagt, dass Abbildungen konstanten Ranges genau diejenigen sind, deren lokales Verhalten dem Verhalten ihrer Differentiale entspricht.

Folge 7.12. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, und sei M zusammenhängend. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Für jedes $p \in M$ gibt es glatte Karten, die p beziehungsweise $F(p)$ enthalten, in denen die Koordinatendarstellung von F linear ist.
- (b) F hat konstanten Rang.

Proof. Angenommen zunächst, dass F in einer Umgebung jedes Punktes eine lineare Koordinatendarstellung besitzt. Da jede lineare Abbildung konstanten Rang hat, folgt, dass der Rang von F in einer Umgebung jedes Punktes konstant ist. Aufgrund der Zusammenhängendheit ist er daher auf ganz M konstant. Umgekehrt zeigt der Rangsatz, falls F konstanten Rang hat, dass F in einer Umgebung jedes Punktes die lineare Koordinatendarstellung (7.1) besitzt. □

Wir verwenden nun den Rangsatz, der eine rein lokale Aussage ist, um etwas über die globale Natur glatter Abbildungen aufgrund ihres Ranges auszusagen. Zuvor erinnern wir an die folgenden topologischen Begriffe.

Definition 7.13. Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **nirgend dicht**, wenn ihr Abschluss leeres Inneres hat:

$$\text{int}(\overline{A}) = \emptyset.$$

- (b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **mager** (oder **von erster Kategorie**), wenn sie als abzählbare Vereinigung nirgend dichter Mengen geschrieben werden kann:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (c) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **komager** (oder **residuell**, oder **von zweiter Kategorie**), wenn ihr Komplement $X \setminus A$ mager ist.

Satz 7.14 (Satz von Baire). Die folgenden zwei Klassen topologischer Räume sind **Baire-Räume**, das heißt, jeder abzählbare Schnitt offener dichter Teilmengen ist dicht:

- (i) Jeder **vollständige metrische Raum** (X, d) ist ein Baire-Raum.
- (ii) Jeder **lokalkompakte Hausdorff-Raum** X ist ein Baire-Raum.

Eine andere Möglichkeit, dies zu formulieren, ist die folgende. Sei X entweder ein vollständiger metrischer Raum oder ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann gelten die folgenden äquivalenten Aussagen:

- (a) (**Offene dichte Mengen**) Ist $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ eine abzählbare Familie offener dichter Teilmengen von X , dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^\infty U_n \neq \emptyset.$$

Tatsächlich ist

$$\bigcap_{n=1}^\infty U_n$$

dicht in X .

- (b) (**Nirgends dichte Mengen**) Ist $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ eine abzählbare Familie nirgends dichter Teilmengen von X , dann gilt

$$\text{int} \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \right) = \emptyset.$$

Das heißt, X kann nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen geschrieben werden.

- (c) (**Magere Mengen**) Keine nichtleere offene Teilmenge von X ist mager. Äquivalent dazu ist X selbst nicht mager:

$$X \neq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{wenn jedes } A_n \text{ nirgends dicht in } X \text{ ist.}$$

- (d) (**Residuelle Mengen**) Jede komagere, also residuelle, Teilmenge von X ist dicht in X .

Wir formulieren und beweisen nun den globalen Rangsatz.

Satz 7.15 (Globaler Rangsatz). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung konstanten Ranges.

- (a) Ist F surjektiv, dann ist F eine glatte Submersion.
- (b) Ist F injektiv, dann ist F eine glatte Immersion.
- (c) Ist F bijektiv, dann ist F ein Diffeomorphismus.

Proof. Seien

$$m = \dim M, \quad n = \dim N,$$

und angenommen, F habe konstanten Rang r . Um (a) zu beweisen, nehmen wir an, dass F keine glatte Submersion ist. Das bedeutet

$$r < n.$$

Nach dem Rangsatz, Theorem 7.11, gibt es für jedes $p \in M$ glatte Karten (U, φ) für M mit Zentrum in p und (V, ψ) für N mit Zentrum in $F(p)$, sodass

$$F(U) \subseteq V$$

gilt und die Koordinatendarstellung von F durch (7.1) gegeben ist.

Durch eventuelles Verkleinern von U können wir annehmen, dass U ein regulärer Koordinatenball ist und

$$F(\bar{U}) \subseteq V$$

gilt, wobei \bar{U} der abgeschlossene Koordinatenball und der Abschluss der offenen Menge U ist. Dies impliziert, dass $F(\bar{U})$ eine kompakte Teilmenge der Menge

$$\{y \in V : y^{r+1} = \dots = y^n = 0\}$$

ist. Daher ist $F(\bar{U})$ abgeschlossen in N und enthält keine offene Teilmenge von N ; folglich ist $F(\bar{U})$ nirgends dicht in N . Da jede offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, können wir abzählbar viele solcher Karten

$$\{(U_i, \varphi_i)\}$$

wählen, die M überdecken, mit entsprechenden Karten

$$\{(V_i, \psi_i)\}$$

die $F(M)$ überdecken. Da $F(M)$ gleich der abzählbaren Vereinigung der nirgends dichten Mengen

$$F(\bar{U}_i)$$

ist, folgt aus dem Satz von Baire, Theorem 7.14, dass $F(M)$ leeres Inneres in N hat. Das bedeutet, dass F nicht surjektiv sein kann.

Um (b) zu beweisen, nehmen wir an, dass F keine glatte Immersion ist, also

$$r < m.$$

Nach dem Rangsatz können wir für jedes $p \in M$ Karten auf Umgebungen von p und $F(p)$ wählen, in denen F die Koordinatendarstellung (7.1) hat. Daraus folgt, dass

$$F(0, \dots, 0, \varepsilon) = F(0, \dots, 0, 0)$$

für jedes hinreichend kleine ε gilt. Also ist F nicht injektiv.

Schließlich folgt (c) aus (a) und (b), denn eine bijektive glatte Abbildung konstanten Ranges ist nach Teil (a) eine glatte Submersion und nach Teil (b) eine glatte Immersion. Daher impliziert Proposition 7.7, dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist, und da F bijektiv ist, ist F ein Diffeomorphismus. \square

7.3 Einbettungen

Eine spezielle Art von Immersion ist besonders wichtig.

Definition 7.16. Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten, so heißt eine **glatte Einbettung von M in N** eine glatte Immersion

$$F : M \rightarrow N,$$

die außerdem eine topologische Einbettung ist, das heißt ein Homöomorphismus auf ihr Bild

$$F(M) \subseteq N$$

bezüglich der Teilraumtopologie.

Beispiel 7.17 (Glatte Einbettungen). 1. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und ist $U \subseteq M$ eine offene Untermannigfaltigkeit, dann ist die Inklusionsabbildung

$$U \hookrightarrow M$$

eine glatte Einbettung.

2. Sind M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten und sind $p_i \in M_i$ beliebig gewählte Punkte, dann ist jede der Abbildungen

$$\iota_j : M_j \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$$

gegeben durch

$$\iota_j(q) = (p_1, \dots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \dots, p_k)$$

eine glatte Einbettung. Insbesondere ist die Inklusionsabbildung

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

gegeben durch

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

eine glatte Einbettung.