

Tatsächlich erlaubt uns dies auch, das folgende Resultat zu beweisen, welches besagt, dass die Tangentialvektoren als Äquivalenzklassen dasselbe sind wie Derivationen.

Lemma 5.5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann ist die Abbildung

$$\partial : T_p M \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty), \quad \gamma'(0) \mapsto \partial_{\gamma'(0)},$$

ein **Isomorphismus**. Insbesondere ist jede Derivation eine Richtungsableitung, und für jede Karte $\phi : U \rightarrow V$ mit $p \in U$ ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

eine Basis von $\text{Der}(C_p^\infty)$.

Proof. Wir haben bereits gezeigt, dass ∂ tatsächlich eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen ist und dass wir bei gegebener Karte die Derivationen $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ erhalten. Wir zeigen nun, dass

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

eine Basis von $\text{Der}(C_p^\infty)$ bilden. Daraus wissen wir nämlich, dass die lineare Abbildung ∂ die Basis

$$(d\phi|_p)^{-1}(e_1), \dots, (d\phi|_p)^{-1}(e_n)$$

von $T_p M$ auf die Basis

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

von $\text{Der}(C_p^\infty)$ abbildet und somit ein Isomorphismus ist.

a) **Lineare Unabhängigkeit:** Sei

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = 0.$$

Wir müssen zeigen:

$$\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0.$$

Wähle

$$f = x^j.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha^i \left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p = \alpha^j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

b) **Erzeugendensystem:** Sei $\delta \in \text{Der}(C_p^\infty)$. Setze

$$\alpha^j := \delta(x^j) = \delta(\phi^j), \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Wir werden zeigen, dass

$$\delta = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p.$$

Übung: Beweisen Sie, dass jede Derivation auf konstanten Funktionen verschwindet.

Sei $f \in C_p^\infty$, und nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass

$$\phi(\tilde{U}) = B(\phi(p), r).$$

Genauer gesagt, da $f \in C^\infty(\tilde{U})$ mit $p \in \tilde{U}$ offen, wählen wir eine Umgebung $\tilde{\tilde{U}}$ von p mit

$$\tilde{\tilde{U}} \subset \tilde{U} \cap U$$

und nehmen an, dass ihr Bild eine offene Kugel ist. Wäre M gleich \mathbb{R}^n , so hätten wir zur Konstruktion einer Funktion den Satz von Taylor verwendet. Tatsächlich gilt:

Behauptung 5.6. Für jede Funktion $h \in C^\infty(B(q, r))$ existieren $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(q, r))$ mit

(i)

$$h(x) = h(q) + \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) g_i(x)$$

und

(ii)

$$\frac{\partial h}{\partial x^i}(q) = g_i(q).$$

Beweis der Behauptung: Für $x \in B(q, r)$ setze

$$w_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad w_x(t) := h(tx + (1-t)q).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h(x) - h(q) &= w_x(1) - w_x(0) \\ &= \int_0^1 \dot{w}_x(t) dt \quad (\text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung}) \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{tx+(1-t)q} \cdot (x^i - q^i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - q^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x^i} \Big|_{tx+(1-t)q} dt}_{=: g_i(x)}. \end{aligned}$$

Wir gehen nun rückwärts vor und definieren g_i als die Funktion in der letzten Zeile der Gleichung, womit (i) bewiesen ist. Sobald wir (i) haben, folgt (ii) durch Differentiation. \square

Wir verwenden die oben bewiesene Behauptung mit $h = f \circ \phi^{-1}$. Also existieren $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(B(x(p), r))$, sodass

$$(f \circ \phi^{-1})(x) = (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) + \sum_{i=1}^n (\phi^i - \phi^i(p)) \cdot g_i(x)$$

und

$$\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) = g_i(\phi(p)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\delta(f) &\stackrel{\text{Lokalität}}{=} \delta(f|_{\tilde{V}}) \\
&= \delta\left(f(p) + \sum_{i=1}^n (\phi^i - \phi^i(p))(g_i \circ \phi)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \delta((\phi^i - \phi^i(p))(g_i \circ \phi)) \\
&\stackrel{\text{Leibniz-Regel}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\delta(\phi^i - \phi^i(p)) \cdot g_i(\phi(p)) + \underbrace{(\phi^i - \phi^i(p))|_p}_{=0} \delta(g_i \circ \phi) \right) \\
&\stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^n \delta(x^i) g_i(x(p)) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.
\end{aligned}$$

□

Von nun an identifizieren wir $T_p M$ mit $\text{Der}(C_p^\infty)$ über den Isomorphismus ∂ . Zum Beispiel schreiben wir für $\xi \in T_p M$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

anstelle von

$$\partial_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{und} \quad \xi = \sum_{i=1}^n \xi^i (d\phi|_p)^{-1}(e_i),$$

wobei

$$(\xi^1, \dots, \xi^n)^\top = d\phi|_p(\xi).$$

Koordinatenwechsel:

Wie ändern sich die Koeffizienten ξ^1, \dots, ξ^n eines Tangentialvektors, wenn wir die Karte (U, ϕ) durch eine andere Karte (V, ψ) ersetzen?

Sei $\xi \in T_p M$, und seien (U, ϕ) und (V, ψ) Karten, die beide p enthalten. Wir drücken ξ bezüglich beider Karten aus:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Nun wollen wir die Koeffizienten ξ^i durch die η^j ausdrücken und umgekehrt. Mit der Kettenregel, Prop. 4.12, berechnen wir

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = d\phi|_p(\xi) = (d\phi|_p) \left((d\psi|_p)^{-1} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \right) = D(\phi \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}.$$

Analog gilt

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = D(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \cdot \xi^i \tag{1.6}$$

Betrachten wir den Spezialfall

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

das heißt,

$$(\xi^1, \dots, \xi^n)^\top = e_i.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^k} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \quad (1.7)$$

Wenn wir die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, was bedeutet, dass über einen Index, der in einem Ausdruck zweimal vorkommt – einmal als oberer und einmal als unterer Index – summiert wird, so kann die obige Gleichung geschrieben werden als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial(y^j \circ x^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

oder noch kürzer als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

5.1 Differential einer Abbildung in Koordinaten

Wir erinnern daran, dass wir das Differential einer Abbildung f sowohl mittels des Begriffs der Tangentialvektoren über Kurven als auch mittels Derivationen definiert haben. Wir möchten nun einige explizite Berechnungen durchführen und sehen, wie der Ausdruck df für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ in Koordinaten aussieht. Versuchen wir, dies im Spezialfall $M = \mathbb{R}^n$ und $N = \mathbb{R}^m$ zu verstehen. Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Für jedes $p \in U$ erwarten wir, dass df eine $m \times n$ -Matrix ist. Wir bestimmen die Matrix explizit bezüglich der Standardkoordinatenbasen. Mit (x^1, \dots, x^n) als Bezeichnung der Koordinaten im Definitionsbereich und (y^1, \dots, y^m) als Bezeichnung derjenigen im Wertebereich verwenden wir die Kettenregel, um die Wirkung von df_p auf einen typischen Basisvektor wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) h &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (h \circ f) \\ &= \frac{\partial h}{\partial y^j} (f(p)) \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (p) \\ &= \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} \right) h. \end{aligned}$$

Somit ist

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} (p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)}. \quad (5.1)$$

Dies besagt, dass die Matrix der linearen Abbildung df_p bezüglich der Koordinatenbasen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

ist, was genau die Jacobi-Matrix von f an der Stelle p ist. Daher entspricht in diesem Fall

$$df_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$$

der totalen Ableitung

$$Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Betrachten wir nun den allgemeineren Fall einer glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Indem wir glatte Koordinatenkarten (U, φ) für M , die p enthalten, und (V, ψ) für N , die $F(p)$ enthalten, wählen, erhalten wir die Koordinatendarstellung

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V).$$

Sei $\hat{p} = \varphi(p)$ die Koordinatendarstellung von p . Nach der obigen Berechnung wird $d\hat{F}_{\hat{p}}$ bezüglich der Standardkoordinatenbasen durch die Jacobi-Matrix von \hat{F} an der Stelle \hat{p} dargestellt. Unter Verwendung der Tatsache, dass $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$, berechnen wir

$$\begin{aligned} dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= dF_p \left(d(\varphi^{-1})_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\hat{p}} \right) \right) = d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})} \left(d\hat{F}_{\hat{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\hat{p}} \right) \right). \\ dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})} \left(\frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\hat{F}(\hat{p})} \right) \\ &= \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Somit wird dF_p in Koordinatenbasen durch die Jacobi-Matrix der (Koordinatendarstellung von) F dargestellt. Manchmal wird das Differential einer Abbildung auch der **Pushforward von F** genannt und mit F_* bezeichnet.

6. Vektorfelder

Als Nächstes wollen wir Vektorfelder einführen. Vektorfelder sind Abbildungen, die jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor im entsprechenden Tangentialraum zuordnen. Wir haben Folgendes:

Definition 6.1. Eine Abbildung $\xi : M \rightarrow TM$ heißt **Vektorfeld** auf M , falls für jedes $p \in M$ gilt

$$\pi(\xi(p)) = p. \tag{6.1}$$

Wir können die Koordinatendarstellung einer Karte verwenden, um die lokale Koordinatenbeschreibung eines beliebigen Vektorfeldes anzugeben. Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte von M . Ein Vektorfeld ξ auf U ist durch die Funktionen charakterisiert, welche die Koeffizienten des Tangentialvektors $\xi(p)$, $p \in M$, sind. Genauer gesagt, gibt es

$$\xi^1, \dots, \xi^n : V \rightarrow \mathbb{R},$$

für die

$$\xi(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Für die Karte ϕ von M betrachten wir die entsprechende Karte Φ_ϕ auf TM . Mit der bisherigen Notation sehen wir, dass ξ der Abbildung

$$v \mapsto (v, \xi^1(v), \dots, \xi^n(v)), \quad v \in V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

entspricht. Somit ist ξ genau dann C^k auf U , wenn die Koeffizientenfunktionen ξ^1, \dots, ξ^n auf V C^k sind.

7. Untermannigfaltigkeiten

Wie bei jeder mathematischen Struktur ist es, sobald wir die Theorie der Mannigfaltigkeiten gesehen und verstanden haben, sinnvoll zu fragen, ob auch Teilmengen von Mannigfaltigkeiten eine glatte Struktur tragen. Wir werden sehen, dass die Begriffe *Immersion*, *Submersion* und *Einbettung* die Schlüsseleigenschaften sind, die es uns ermöglichen, spezielle Teilmengen einer Mannigfaltigkeit zu untersuchen, welche ihrerseits Mannigfaltigkeiten sind.

7.1 Submersionen, Immersionen und Einbettungen

Definition 7.1. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für $p \in M$ definieren wir den **Rang von F an der Stelle p** als den Rang der linearen Abbildung

$$dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N.$$

Mit anderen Worten, er ist der Rang der Jacobi-Matrix von F in einer beliebigen glatten Karte, beziehungsweise die Dimension von $\text{Im } dF_p \subseteq T_{F(p)} N$.

Hat F an jedem Punkt denselben Rang r , so sagen wir, dass F **konstanten Rang** hat, und schreiben $\text{rank } F = r$.

Aus dem Rangsatz wissen wir, dass der Rang von $F \leq \min\{\dim M, \dim N\}$ ist. Ist der Rang von dF_p gleich dieser oberen Schranke, so sagen wir, dass F **an der Stelle p vollen Rang hat**, und falls F überall vollen Rang hat, so sagen wir, dass F **vollen Rang hat**.

Definition 7.2. Eine glatte Abbildung $F: M \rightarrow N$ heißt **glatte Submersion**, falls ihr Differential an jedem Punkt surjektiv ist (oder äquivalent, falls $\text{rank } F = \dim N$).

Sie heißt **glatte Immersion**, falls ihr Differential an jedem Punkt injektiv ist (äquivalent, $\text{rank } F = \dim M$).

Vorschlag 7.3. Sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$. Ist dF_p surjektiv, so besitzt p eine Umgebung U , sodass $F|_U$ eine Submersion ist. Ist dF_p injektiv, so besitzt p eine Umgebung U , sodass $F|_U$ eine Immersion ist.

Proof. Wählen wir beliebige glatte Koordinaten für M in der Nähe von p und für N in der Nähe von $F(p)$, so bedeutet jede der beiden Voraussetzungen, dass die Jacobi-Matrix von F in Koordinaten an der Stelle p vollen Rang hat. Das Resultat folgt nun aus der Tatsache, dass die Menge der $m \times n$ -Matrizen vollen Ranges eine offene Teilmenge von $M(m \times n, \mathbb{R})$ ist¹, sodass aufgrund der Stetigkeit die Jacobi-Matrix von F in einer Umgebung von p vollen Rang hat. \square

Beispiel 7.4 (Submersionen und Immersionen).

- Seien M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist jede der Projektionsabbildungen $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ eine glatte Submersion. Insbesondere ist die Projektion $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf die ersten n Koordinaten eine glatte Submersion.
- Ist $\gamma: J \rightarrow M$ eine glatte Kurve in einer glatten Mannigfaltigkeit M mit oder ohne Rand, so ist γ genau dann eine glatte Immersion, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ gilt.
- Übung:** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und werde ihr Tangentialbündel mit TM bezeichnet. Beweisen Sie, dass die Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ eine glatte Submersion ist.
- Die glatte Abbildung $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(u, v) = ((2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \sin 2\pi u)$$

ist eine glatte Immersion von \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 , deren Bild die donutförmige Fläche ist, die durch Rotation des Kreises $(y-2)^2 + z^2 = 1$ in der (y, z) -Ebene um die z -Achse entsteht.

¹Sei f die Funktion, die $A \in M(m \times n)$ auf $f(A) = \sum_B |\det(B)|$ abbildet, wobei die Summe über alle $m \times m$ -Untermatrizen von A läuft (unter der Annahme $m < n$). Offensichtlich ist f stetig, sodass $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ eine offene Teilmenge von $M(m \times n)$ ist.