

Lesung 4

5. Derivation und Tangentialvektoren

In dieser Vorlesung betrachten wir eine weitere Möglichkeit, Tangentialvektoren zu definieren, und sprechen außerdem über Richtungsableitungen, die das Analogon zum Begriff der partiellen Ableitungen aus der Mehrvariablenrechnung darstellen. Dies wird bei der Durchführung konkreter Berechnungen nützlich sein.

Notation. Wir bezeichnen mit $C^k(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^k\}$

Definition 5.1 (Richtungsableitungen). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Sei $\gamma'(0) \in T_p M$ und $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren

$$\partial_{\gamma'(0)} f = df_p(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} \in \mathbb{R},$$

und nennen dies die **Richtungsableitung von f** in Richtung des Tangentialvektors $\gamma'(0)$.

Definition 5.2 (Ableitungen). Eine Abbildung $\partial : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ wird als Ableitung in p bezeichnet, wenn Folgendes gilt.

1. Lokalität: Wenn $\tilde{U} \subset U$ offen ist, $p \in \tilde{U}$ und $f \in C^\infty(U)$, dann

$$\partial f = \partial(f|_{\tilde{U}}).$$

2. \mathbb{R} -Linearität: Wenn $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g \in C_p^\infty$ sind, dann gilt

$$\partial(af + bg) = a\partial f + b\partial g.$$

3. Leibniz-Regel: Wenn $f, g \in C_p^\infty$ sind, dann gilt

$$\partial(fg) = g\partial f + f\partial g.$$

Es ist klar, dass die üblichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$ in \mathbb{R}^n Ableitungen sind. Tatsächlich wurde die Definition eingeführt, um Folgendes zu beweisen.

Vorschlag 5.3. Die Richtungsableitungen $\partial_{\gamma'(0)}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit sind Ableitungen.

Proof. Wir überprüfen lediglich die Leibniz-Regel, die sich im Wesentlichen aus der Leibniz-Regel in \mathbb{R}^n ergibt. Wir haben

$$\begin{aligned} \partial_{\gamma'(0)}(fg) &= \frac{d}{dt}((fg) \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}((f \circ \gamma)(g \circ \gamma))|_{t=0} \\ &= (g \circ \gamma)(0) \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} + (f \circ \gamma)(0) \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)|_{t=0} \quad (\text{Leibnizsche Regel in euklidischen Räumen}) \\ &= g(p)\partial_{\gamma'(0)}f + f(p)\partial_{\gamma'(0)}g. \end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen die Menge **aller Derivationen in p mit** $\text{Der}(C_p^\infty)$. Dieser Raum ist ein reeller Vektorraum via

$$(\alpha\partial_1 + \beta\partial_2)(f) = \alpha\partial_1 f + \beta\partial_2 f.$$

Wir möchten noch eine andere Sichtweise auf Tangentialvektoren gewinnen, und das nächste Lemma setzt genau hier an.

Lemma 5.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Die Abbildung

$$\partial : T_p M \rightarrow \text{Der}(C_p^\infty), \quad \gamma'(0) \mapsto \partial_{\gamma'(0)},$$

ist linear.

Beweis. Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine Karte von M mit $p \in U$. Wir müssen die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ verwenden, um die Linearität der Abbildung zu überprüfen; dass sie wohldefiniert ist, ist klar. Das heißt, wir müssen zeigen, dass

$$\partial \circ (d\phi|_p)^{-1}$$

linear ist. Sei dazu $v \in \mathbb{R}^n$ und setze

$$\gamma(t) := \phi^{-1}(\phi(p) + tv).$$

Für $f \in C_p^\infty$ berechnen wir

$$\begin{aligned} (\partial \circ (d\phi|_p)^{-1}(v))(f) &= df|_p((d\phi|_p)^{-1}(v)) \\ &= df|_p(\gamma'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv)) \right|_{t=0} \\ &= \langle D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}, v \rangle. \end{aligned}$$

Dies ist ein Ausdruck, der linear in v ist. □

Damit können wir Tangentialvektoren als Derivationen auffassen; die Idee dabei ist, dass man zu einem Tangentialvektor die Richtungsableitung in dessen Richtung betrachtet.

Seien e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{R}^n . Dann bilden $(d\phi|_p)^{-1}(e_1), \dots, (d\phi|_p)^{-1}(e_n)$ eine Basis von $T_p M$. Wie sieht diese Basis konkret aus? Wir berechnen

$$\partial_{(d\phi|_p)^{-1}(e_j)}(f) = \langle D(f \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}, e_j \rangle = \left. \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} =: \left. \frac{\partial f}{\partial x^j} \right|_p,$$

wobei wir die Notation leicht missbrauchen und weiterhin $f \circ \phi^{-1} = f$ schreiben, also die Koordinatendarstellung von f in der Karte (U, ϕ) meinen.

Dies zeigt, dass für jede Karte (U, ϕ) auf M , wenn wir (x^1, \dots, x^n) als Koordinaten auf U schreiben, gilt:

Zu jeder Karte (U, ϕ) gehören die Derivationen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p.$$