

4. Tangentialvektoren und Tangentialräume

Erinnern wir uns daran, dass die Definition einer glatten Mannigfaltigkeit sowie einer glatten Abbildung aus der Perspektive motiviert war, zu definieren, was es bedeuten könnte, dass eine Funktion f differenzierbar ist. Wir kehren noch einmal zu unseren Studien der Differentialrechnung zurück und erinnern uns daran, dass die Ableitung einer Abbildung die *beste lineare Approximation* der Abbildung war. In euklidischen Räumen macht eine lineare Approximation sowohl theoretisch als auch bildlich Sinn. Was könnte der geeignete Begriff einer linearen Approximation auf einer Mannigfaltigkeit sein? Beginnen wir mit dem einfachsten möglichen Fall.

Wir erinnern zunächst daran, dass, wenn $p \in M$ ist, unter einer Kurve auf M , die durch p verläuft, eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ zu verstehen ist. Ist die Abbildung differenzierbar/glatt, so sagen wir, dass die Kurve differenzierbar/glatt ist.

Definition 4.1. Ein **Tangentialvektor** auf M am Punkt $p \in M$ ist eine **Äquivalenzklasse** differenzierbarer Kurven $[\gamma]$, die durch p verlaufen, wobei $\gamma_1 \sim \gamma_2$ gilt, wenn für eine Koordinatendarstellung $\phi : U \rightarrow V$ mit $p \in U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2)|_{t=0}. \quad (4.1)$$

Wir bezeichnen $[\gamma] = \gamma'(0)$.

Es ist offensichtlich, dass \sim tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Wir stellen außerdem fest, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Wenn (U', ψ) ein anderes Koordinatensystem ist, das p enthält, dann berechnen wir unter Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma))|_{t=0} = D(\psi \circ \phi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)|_{t=0},$$

wobei $D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Ableitung der Übergangsabbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ am Punkt $\phi(p)$ ist und eine invertierbare lineare Abbildung ist, da $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Abbildung mit einer glatten Inversen ist. Somit ist die Bedingung

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2)|_{t=0}$$

äquivalent zur Bedingung

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)|_{t=0}.$$

Definition 4.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Die Menge

$$T_p M = \{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ ist eine Kurve, die durch } p \text{ verläuft}\}$$

als der **Tangentialraum** von M in p bezeichnet.

Auch wenn die Definition eines Tangentialraums sehr geometrisch ist, gibt sie kaum Aufschluss darüber, um welche Art von Raum es sich bei $T_p M$ handelt. Der folgende Satz zeigt, dass es sich um einen n -dimensionalen Vektorraum handelt.

Vorschlag 4.3. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ mit einer Koordinatensystem (U, ϕ) , das p enthält. Der Tangentialraum $T_p M$ besitzt eine eindeutige Vektorraumstruktur, sodass die Abbildung

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n, [\gamma] \mapsto (\phi \circ \gamma)'(0) \quad (4.2)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Somit ist für jeden Punkt $p \in M$ der Tangentialraum $T_p M$ an diesem Punkt ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

Proof. Die Abbildung in (4.2) ist eindeutig definiert und injektiv. Für die Surjektivität müssten wir zeigen, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ eine Kurve existiert, deren Tangentialvektor v ist. Definieren wir $\gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$ und wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\phi(p) + tv \in \phi(U)$ gilt. Dann gilt

$$d\phi_p(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt} (\phi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi(p) + tv)|_{t=0} = v.$$

Die Abbildung ist zudem ein linearer Isomorphismus, und tatsächlich lässt sich die Vektorraumstruktur wie folgt explizit beschreiben: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \in T_pM$, dann gilt

$$a\gamma'_1(0) + b\gamma'_2(0) = (d\phi_p)^{-1}(ad\phi_p(\gamma'_1(0)) + bd\phi_p(\gamma'_2(0))).$$

Es bleibt also nur noch zu beweisen, dass die Vektorraumstruktur auf T_pM kartengunabhängig ist. Um dies zu zeigen, sei $(\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V})$ eine weitere Koordinatensystem mit $p \in \tilde{U}$. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung $d\psi_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear in Bezug auf die durch ϕ induzierte Vektorraumstruktur ist. Wir haben jedoch bereits gesehen, dass

$$d\psi_p = \underbrace{D(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}}_{\text{invertierbar linear}} \circ \underbrace{d\phi_p}_{\text{invertierbar linear}},$$

und somit ein Vektorraum-Isomorphismus ist. □

Wir können uns T_pM als die lineare Approximation von M am Punkt p vorstellen.

Wir können nun die Differentialform einer differenzierbaren Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten definieren.

Lemma 4.4. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $p \in M$. Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung in der Nähe von p . Dann ist die Abbildung

$$df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N, \gamma'(0) \mapsto (f \circ \gamma)'(0), \quad (4.3)$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen T_pM und $T_{f(p)}N$ ist. Die Abbildung df_p wird als **Differential von f am Punkt p** bezeichnet.

Proof. Sei (U, ϕ) eine Koordinatendarstellung von M , die p enthält, und sei (\tilde{U}, ψ) eine Koordinatendarstellung von N , die $f(p)$ enthält. Wir berechnen unter Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} d\psi_{f(p)}((f \circ \gamma)'(0)) &= (\psi \circ f \circ \gamma)'(0) \\ &= ((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma))'(0) \\ &= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \cdot ((\phi \circ \gamma)'(0)) \\ &= D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \cdot d\phi_p(\gamma'(0)). \end{aligned}$$

Die vorstehende Gleichung impliziert, dass

$$df_p = (d\psi_{f(p)})^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \cdot d\phi_p,$$

und somit wohldefiniert ist, d. h. unabhängig von der Wahl der Kurve γ und eine lineare Abbildung ist. □

Wir stellen fest, dass, wenn $U \subset M$ offen ist, die Differentialform der Einbettungsabbildung $i : U \hookrightarrow M$ der natürliche Isomorphismus $di : T_pU \rightarrow T_pM$ ist, der durch

$$\gamma'(0) \mapsto (i \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0),$$

und somit $T_pU = T_pM$.

Aufgabe 4.5. Beweisen Sie, dass, wenn M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten sind und $p \in M, q \in N$, dann

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$$

auf kanonische Weise gilt.

Erinnern wir uns daran, dass V ein Vektorraum ist; dann wird sein Dualraum mit V^* bezeichnet und ist der Raum der linearen Funktionale auf V , d. h. der skalaren linearen Abbildungen auf V . Mit anderen Worten:

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R}), \text{ wobei } \text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}.$$

Somit definieren wir den **Kotangentenraum** an $p \in M$ als

$$T_p^*(M) = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R}) = (T_p M)^*. \tag{4.4}$$

Die zuvor besprochenen Räume $T_p M$ und $T_p^* M$ besitzen, wenn man sie für alle Punkte von M zusammenfasst, selbst eine Mannigfaltigkeitsstruktur und sind nützliche Beispiele für mathematische Objekte, die als **Vektorbündel** bezeichnet werden. Wir werden später noch näher darauf eingehen, aber zunächst wollen wir uns mit Tangenten- und Kotangentenbündeln befassen.

4.1 Tangential- und Kotangentenbündel

Definition 4.6. Das **Tangentenbündel** TM einer glatten Mannigfaltigkeit M ist die (disjunkte) Vereinigung aller ihrer Tangentialräume:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

- Die Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$, die einen Tangentialraum $T_p M$ auf den Punkt p abbildet, wird als **Projektionsabbildung** bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass π surjektiv ist.
- Die Teilmenge von TM , die aus den Nullvektoren $0 \in T_p M$, $p \in M$ besteht, wird als **Nullschnitt** von TM bezeichnet.
- Der Tangentialraum $T_p M \subset TM$ wird als **Faser** über $p \in M$ bezeichnet.

Somit ist jede Faser des Tangentenbündels ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Auch wenn TM im Moment wie eine beliebige Menge aussieht, beweist das folgende Ergebnis, dass es nicht nur eine von M geerbte Topologie besitzt, sondern selbst eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung 4.7. Ein beliebiger Punkt von TM lässt sich als (p, v) darstellen, wobei $p \in M$ und $v \in T_p M$ gilt, wobei letzterer der Tangentialraum am Punkt p ist.

Satz 4.8. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Das Tangentenbündel TM kann auf natürliche Weise mit einer glatten Struktur von M versehen werden, wodurch es zu einer $2n$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit wird. In Bezug auf die glatte Struktur sind die Projektionsabbildung $\pi : TM \rightarrow M$, die Inklusionsabbildung $i : M \hookrightarrow TM$ als Nullschnitt sowie die natürlichen Inklusionen $i : T_p M \hookrightarrow TM, p \in M$ allesamt glatte Abbildungen.

Proof. Der erste Schritt bei der Beschreibung einer glatten Struktur auf TM besteht darin, einen Atlas anzugeben.

Behauptung 4.9. Sei (U, ϕ) eine Koordinatendarstellung auf M . Dann ergibt sich daraus eine Koordinatensystem $(TU, T\phi)$ auf TM , wobei $TU = \bigcup_{p \in U} T_p M$ und $T\phi : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ unter Verwendung der linearen Isomorphismen $d\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert ist:

$$TU \supset T_p M \ni X \mapsto (\phi(p), d\phi_p(X)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

Ist (V, ψ) eine weitere Koordinatensystem auf M , so ist die Übergangsabbildung zwischen den Koordinatensystemen $(TU, T\phi)$ und $(TV, T\psi)$ gegeben durch

$$T\psi \circ T\phi^{-1}(p, v) = (\psi \circ \phi^{-1}(p), D(\psi \circ \phi^{-1})(p)v).$$

Beweis von Behauptung 4.9. Übung.

Wir fahren mit dem Beweis des Satzes fort. Wir statten TM mit dem einzigen maximalen glatten Atlas aus, der alle Kartierungen der Form $(TU, T\phi)$ enthält, wobei (U, ϕ) Kartierungen auf M sind, gemäß der Behauptung 4.9. Die zweite Abzählbarkeit und die Hausdorff-Eigenschaft für TM folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von M und der Tatsache, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wiederum abzählbar ist. Somit ist TM eine $2n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Betrachten wir die Abbildung $\pi : TM \rightarrow M, (p, T_p M) \mapsto p$. Betrachten wir eine Koordinatenkarte $(TU, T\phi) \ni (p, T_p M)$, wobei die Koordinatenkarte (U, ϕ) den Punkt $\pi(p)$ enthält. Dann gilt

$$\phi \circ \pi \circ T\phi^{-1}(p, v) = \phi(p)$$

was eindeutig eine glatte Abbildung ist. Analog dazu sind beide Inklusionen glatte Abbildungen. \square

Definition 4.10. Das **Kotangentialbündel** einer Mannigfaltigkeit M ist ebenfalls eine $2n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und wird wie folgt definiert:

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Das Kotangentialbündel T^*M ist ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, was sich auf ähnliche Weise wie im Fall des Tangentialbündels beweisen lässt. Wir werden später mehr über Tangential- und Kotangentialbündel erfahren, aber wir werden sie weiterhin verwenden.

Wir können nun das Differential einer glatten Abbildung definieren.

Definition 4.11. Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Das **Differential von f** , df , ist die Abbildung

$$df : TM \rightarrow TN : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Die Beschränkung von df an jedem Punkt ist genau die in Lemma 4.4 beschriebene Abbildung df_p .

Der Beweis von Lemma 4.4 zeigt auch, dass, wenn M , N und f glatt sind, dies auch für df gilt.

Unter Verwendung der in der obigen Definition beschriebenen Formulierung von df als Abbildung zwischen Tangentialbündeln können wir nun einen einfachen Beweis für die sehr wichtige Kettenregel liefern.

Vorschlag 4.12 (Kettenregel). Für glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten gilt

$$d(g \circ f) = dg \circ df : TM \rightarrow TP.$$

An jedem Punkt $p \in M$, $f(p) \in N$, lautet dies

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p. \quad (4.5)$$

Proof. Wir beweisen (4.5). Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_p(\gamma'(0)) &= \frac{d}{dt}((g \circ f) \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(g \circ (f \circ \gamma))|_{t=0} \\ &= dg_{f(p)}((f \circ \gamma)'(0)) \quad (\text{Kettenregel in } \mathbb{R}^n) \\ &= dg_{f(p)}(df_p(\gamma'(0))). \end{aligned}$$

\square

Eine einfache Folgerung aus dem vorherigen Satz lautet wie folgt.

Folge 4.13. Ist $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so ist auch $df : TM \rightarrow TN$ ein Diffeomorphismus, und darüber hinaus gilt:

$$(df)^{-1} = d(f^{-1}) : TN \rightarrow TM.$$

Proof. Man beachte, dass $d(id_M) : TM \rightarrow TM$ genau die Abbildung id_{TM} ist und somit das Ergebnis aus der Anwendung der Kettenregel folgt:

$$id_{TM} = d(f \circ f^{-1}) = df \circ d(f^{-1}).$$

□

Wir geben außerdem die folgende Definition an.

Definition 4.14. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten wird als **lokaler C^k -Diffeomorphismus** bezeichnet, wenn für jedes $p \in M$ eine Umgebung $U \ni p$ und eine Umgebung $V \ni f(p)$ existieren, sodass $f_U : U \rightarrow V$ ein C^k -Diffeomorphismus ist.

Offensichtlich ist jeder C^k -Diffeomorphismus ein lokaler C^k -Diffeomorphismus, aber das Gegenteil ist nicht unbedingt wahr.

Beispiel 4.15. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Abbildung $f(t) = e^{2\pi it}$. Dann ist f eine surjektive Abbildung, aber nicht injektiv, sodass sie niemals ein Diffeomorphismus sein kann. Sie ist jedoch ein lokaler C^∞ -Diffeomorphismus. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und betrachte $U = (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$ sowie $V = S^1 \setminus \{-f(t_0)\}$.

Beachte außerdem, dass, wenn f ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein linearer Isomorphismus und folglich ist $\dim(T_p M) = \dim(T_{f(p)} N)$ und somit $\dim M = \dim N$.