2.2 Weitere Beispiele

Beispiel 2.15. Sei M^0 eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wissen, dass es sich um einen abzählbaren Raum mit diskreter Topologie handelt. Die Koordinatensätze sind $\{(p, \phi) \mid p \in M, \phi : \{p\} \to \mathbb{R}^0\}$ und sie erfüllen trivialerweise die Kompatibilitätsbedingungen, sodass M^0 eine eindeutige glatte Struktur besitzt.

Beispiel 2.16. Die durch den Atlas $(\mathbb{R}^n, id)$ bestimmte glatte Struktur auf $\mathbb{R}^n$ wird als die **Standard-glatte Struktur auf** $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Beispiel 2.17. Sei V^n ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Da jede Norm auf V eine Topologie bestimmt und alle Normen äquivalent sind, verwenden wir diese Topologie, um V als topologische Mannigfaltigkeit zu betrachten. Wir zeigen im Folgenden, dass V eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine geordnete Basis von V und definiere den Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ durch

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i.$$

Diese Abbildung ist ein Homöomorphismus, und somit ist (V, ϕ^{-1}) eine Koordinatensystem.

Angenommen, $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ sei eine beliebige andere Basis und $\phi'(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i e'_i$ sei der entsprechende Isomorphismus. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass es eine invertierbare Matrix $[A^i_j]$ gibt, sodass für jedes i gilt: $e_i = \sum_{j=1}^{n} A^j_i e'_j$. Die Übergangsabbildung ist dann gegeben durch

$$\phi'^{-1} \circ \phi(x) = x', \quad \text{wobei} \quad x' \in \mathbb{R}^n \ \text{ und } \ \sum_{j=1}^{n} x^{j'} e'_j = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \sum_{i,j=1}^{n} x^i A^j_i e'_j.$$

Mit anderen Worten: Jede Abbildung, die $x \mapsto x'$ sendet, ist eine invertierbare lineare Abbildung und somit ein Diffomorphismus, was beweist, dass beliebige zwei Koordinatensysteme C^∞-kompatibel sind. Die Menge aller solcher Koordinatensysteme definiert eine glatte Struktur auf V und macht es zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.18. Sei $M(n \times m, \mathbb{R})$ der Raum der reellen $n \times m$-Matrizen. Da es sich hierbei um einen reellen Vektorraum der Dimension nm handelt, ist er gemäß dem vorherigen Beispiel eine glatte nm-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.19 ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$)**.** Der Raum der $n \times n$-reellen invertierbaren Matrizen wird als **allgemeine lineare Gruppe** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Da dies eine offene Teilmenge der Menge aller Matrizen ist, handelt es sich um eine n^2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.20. Sind $M_1, \ldots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n_1, \ldots, n_k$, so wissen wir bereits, dass $M_1 \times \cdots \times M_k$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ ist. Die Koordinatensysteme haben die Form $(U_1 \times \cdots \times U_k, \phi_1 \times \cdots \times \phi_k)$. Wir stellen fest, dass, wenn es zwei solche Koordinatensysteme gibt, dann gilt:

$$(\psi_1 \times \cdots \times \psi_k) \circ (\phi_1 \times \cdots \times \phi_k)^{-1} = (\psi_i \circ \phi_1^{-1}) \times \cdots \times (\psi_k \circ \phi_k^{-1}),$$

wodurch $M_1 \times \cdots \times M_k$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit wird. Zum Beispiel ist der n-Torus T^n eine glatte Mannigfaltigkeit.

Wir können eine Version von Satz 1.14 für glatte Mannigfaltigkeiten wie folgt schreiben.

Lemma 2.21. *Sei M eine Menge und nehmen wir an, wir haben eine Sammlung $\{U_i\}_{i \in I}$, wobei I abzählbar ist, von Teilmengen von M mit Abbildungen $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, sodass Folgendes gilt.*

(a) $\underset{i \in I}{U_i} = M.$

(b) Für alle i ist ϕ_i eine Bijektion zwischen U_i und einer offenen Teilmenge $V_i \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Für alle i, j sind die Mengen $\phi_i(U_i \cap U_j)$ und $\phi_j(U_i \cap U_j)$ in $\mathbb{R}^n$ offen.

(d) Wenn $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ für einige i, j gilt, dann ist die Abbildung $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ glatt.

(e) Für Punkte $p, q \in M$ gilt entweder, dass es ein U_i gibt, in dem p und q liegen, oder es gibt verschiedene U_i und U_j mit $p \in U_1$ und $q \in U_j$.

Dann besitzt M eine eindeutige glatte Struktur, sodass jedes (U_i, ϕ_i) eine glatte Koordinatenzahl ist.

Proof. Der Beweis ähnelt dem Beweis von Satz 1.14, wobei die Glattheitsbedingung durch Punkt (d) oben gewährleistet ist. □

Wir können das vorstehende Lemma verwenden, um ein Beispiel für glatte Mannigfaltigkeiten zu geben, die die reellen projektiven Räume verallgemeinern.

Beispiel 2.22 (Grassmannsche Mannigfaltigkeiten). Sei V^n ein reeller Vektorraum und sei

$$G_k(V) = \{W \subset V \mid W \text{ ist ein } k - \text{-dimensionaler Unterraum}\}. \tag{2.5}$$

Die Menge $G_k(V)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ und wird Grassmannsche Mannigfaltigkeit genannt. Offensichtlich gilt $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$.

Wir zeigen, dass $G_k(V)$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Seien P und Q komplementäre Unterräume von V der Dimensionen k bzw. $n-k$, sodass $V = P \oplus Q$ gilt. Ist $f : P \to Q$ eine lineare Abbildung, dann ist $\Gamma(f) \subset V$ ein k-dimensionaler Unterraum mit

$$\Gamma(f) = \{v + fV \mid v \in P\}.$$

Man kann nachweisen, dass $\Gamma(f) \cap Q = \{0\}$. Umgekehrt gilt: Ist $S \subset V$ ein beliebiger Unterraum mit trivialer Schnittmenge mit Q, dann ist $S = \Gamma(f)$, wobei $f = (\pi_{Q_{|S}}) \circ (\pi_{P_{|S}})^{-1}$ ist, wobei $\pi_T : V \to T$ die Projektion ist.

Nachdem dies festgestellt ist, setzen wir

$$L(P,Q) = \{L : P \to Q \mid L \text{ linear}\},$$

was ein Vektorraum ist, und setzen $U_Q \subset G_k(V)$, wobei U_Q jene k-dimensionalen Unterräume von V sind, die eine triviale Schnittmenge mit Q haben. Da $P \in U_Q$ gilt, ist dieser nicht leer. Die Zuordnung $f \mapsto \Gamma(f)$ ergibt eine Abbildung

$$\Gamma : L(P,Q) \to U_Q,$$

die tatsächlich eine Bijektion ist. Bezeichnen wir $\Gamma^{-1} = \phi$. Da $L(P,Q) \cong M((n-k) \times k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$ gilt, ist (U_Q, ϕ) eine Koordinatensystem für $G_k(V)$ und Teil (b) von Lemma 2.21 ist erfüllt.

Sei (P', Q') ein weiteres Paar von Unterräumen wie zuvor und sei $\phi' : U_{Q'}\ rightarrow L(P', Q')$ die entsprechende Kartierung ist, dann stellen wir zunächst fest, dass $\phi(U_Q \cap U_{Q'}) \subset L(P,Q)$ die Menge aller linearen Abbildungen $f : P \to Q$ ist, für die $\Gamma(f) \cap Q' = \{0\}$. Diese Menge $\phi(U_Q \cap U_{Q'})$ ist in $L(P,Q)$ offen. Dies lässt sich wie folgt zeigen. Sei $f \in \phi(U_Q \cap U_{Q'})$, was bedeutet, dass $\Gamma(f) \cap Q' = \{0\}$. Bezeichnen wir mit $I_f : P \to V$, $I_f(p) = p + fv$, so ist dies eine bijektive Abbildung von P nach $\Gamma(f)$. Außerdem ist $\ker \pi_{P'} = Q'$, sodass unter Verwendung der linearen algebraischen Tatsache, dass

$$\text{Rang}(A \circ B) \le \text{Rang}(B) \text{ mit Gleichheit } \iff \text{Im}(B) \cap \ker A = \{0\},$$

sehen wir, dass $\pi_{P'} \circ I_f$ vollen Rang hat, und da die entsprechende Matrix stetig von f abhängt, sehen wir, dass die Menge aller solchen f mit $\Gamma(f) \cap Q' = \{0\}$ offen ist. Somit gilt auch Teil (c) von Lemma 2.21.

Wir zeigen nun, dass die Übergangsabbildungen glatt sind, und überlassen die weiteren Einzelheiten als Übung. Wir wollen zeigen, dass $\phi' \circ \phi^{-1}$ eine glatte Abbildung auf $\phi(U_Q \cap U_{Q'})$ ist. Sei $f \in \phi(U_Q \cap U_{Q'}) \subset L(P,Q)$ eine beliebige Funktion. Sei S der Unterraum $\Gamma(f) \subset V$. Wenn $f' = \phi' \circ \phi^{-1}(f)$, dann gilt $f' = (\pi_{Q'_{|S}}) \circ (\pi_{P'_{|S}})^{-1}$. Irgendwie möchten wir diese Abbildung mit f in Verbindung bringen. Dies lässt sich wie folgt bewerkstelligen: Man beachte, dass $I_f : P \to S = \Gamma(f)$ ein Isomorphismus ist, also

$$f' = (\pi_{Q'_{|S}}) \circ I_f \circ (I_f)^{-1} \circ (\pi_{P'_{|S}})^{-1} = (\pi_{Q'} \circ I_f) \circ (\pi_{P'} \circ I_f)^{-1}.$$

Nun können wir eine beliebige Basis für V wählen und eine Basis für die Räume P, P', Q, Q' aufschreiben; dann seien $A : P \to P'$, $B : P \to Q'$, $C : Q \to P'$ und $D : Q \to Q'$ die linearen Abbildungen mit

$$A = \pi_{P'_{|P}},\ B = \pi_{Q'_{|P}},\ C = \pi_{P'_{|Q}},\ \text{und } D = \pi_{Q'_{|Q}}.$$

So erhalten wir beispielsweise für $p \in P$

$$(\pi_{P'} \circ I_f)p = (A + Cf)p,\ (\pi_{Q'} \circ I_f)p = (B + Df)p,$$

und somit $f' = (B + Df)(A + Cf)^{-1}$. Damit sind wir fertig, denn all dies sind Matrizen, deren Einträge lediglich rationale Funktionen sind, die von f abhängen, und folglich hängen die Matrixeinträge von f' glatt von denen von f ab. Da f glatt war, ist es die Übergangsabbildung ebenfalls. Somit ist auch Teil (d) von Lemma 2.21 erfüllt.

Teil (a) folgt ebenfalls, denn wenn beispielsweise $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine beliebige Basis von V ist und $F \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|F| = k$. Dann gilt: Wenn $V_F =$ lineare Spannungsgruppe$\{e_1, i \in F\}$ und wir $U_F = U_{V_F}$ mit dem entsprechenden $\phi_{V_F} = \phi_F$ setzen, dann ist die endliche Menge $\{(U_F, \phi_F) \mid F \subset \{1, \ldots, n\},\ |F| = k\}$ ist ein glatter Atlas von $G_k(V)$. Analog lässt sich nachweisen, dass $G_k(V)$ tatsächlich Hausdorff ist und somit die Grassmannsche Mannigfaltigkeit eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

$XXXXXX$