

15. Der Satz von Stokes

15.1 Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir beginnen unsere Diskussion über Mannigfaltigkeiten mit Rand. Es handelt sich dabei um ein Konzept, das dem einer Mannigfaltigkeit fast identisch ist, jedoch lassen wir nun auch Punkte im „Rand“ zu, welche dadurch charakterisiert sind, dass jede Umgebung eines solchen Punktes wie ein Teil eines „Halbraums“ aussieht. Sei

$$\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m \geq 0\}.$$

Wir haben Folgendes:

Definition 15.1. Ein topologischer Raum M heißt eine m -dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn er hausdorffsch und zweitabzählbar ist und wenn für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p existiert, die homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{R}_+^m$ ist. Wir definieren den Rand von M als

$$\partial M = \{p \in M \mid p \text{ besitzt keine Umgebung in } M, \text{ die homöomorph zu } \mathbb{R}^m \text{ ist}\}.$$

Somit gilt $p \in \partial M$ genau dann, wenn p eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}_+^m$ ist, sodass p auf den Rand $\partial \mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m = 0\}$ abgebildet wird. Wir nennen

$$\text{int}(M) = M \setminus \partial M$$

das Innere von M .

Beispiel 15.2. Die abgeschlossene Einheitskugel

$$B^m(1) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq 1\}$$

ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, und ihr Rand ist $\partial B^m(1) = S^{m-1}$.

Lemma 15.3. Wenn M^m eine glatte Mannigfaltigkeit ist, dann induziert die glatte Struktur auf M eine glatte Struktur auf ∂M , die sie zu einer $(m-1)$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit macht.

Proof. Sei $p \in \partial M$ und sei $(U, x^1, \dots, x^m)$ eine Karte aus der glatten Struktur von M , die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}_+^m$ ist. Dann ist

$$U \cap \partial M = \{(x^1, \dots, x^m) \mid x^m = 0\},$$

und folglich ist $(U \cap \partial M, x^1, \dots, x^{m-1})$ eine Karte auf ∂M . □

Sei nun M eine orientierbare glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $[\mu]$ eine Orientierung auf M . Dies bedeutet, dass $\mu \in \Omega^m(M)$ nirgendwo verschwindet. Wir erhalten eine induzierte Orientierung auf ∂M . Die induzierte Orientierung auf ∂M ist wie folgt definiert: Angenommen, lokal in der Nähe des Randes gilt

$$\mu = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

mit $f > 0$. Dann definieren wir die induzierte Orientierung auf ∂M lokal als diejenige, die durch die Differentialform

$$\eta = (-1)^m dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m-1} \tag{15.1}$$

repräsentiert wird. Durch die Wahl einer Partition der Eins können wir diese lokalen $(m-1)$ -Formen auf ∂M zu einer globalen, nirgendwo verschwindenden $(m-1)$ -Form auf ∂M zusammenfügen. Die Eigenschaft, dass η nirgendwo verschwindet, folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von μ . Somit erhalten wir aus Theorem 14.14 eine Volumenform, die eine Orientierung auf ∂M definiert, welche von der Orientierung auf M induziert wird.

Wir erklären, warum η in (15.1) diese Form hat. Beachte, dass in Koordinatenkarten nahe dem Rand M durch $x^m \geq 0$ definiert ist. Also ist $-x^m$ die „nach außen zeigende Normale“ von M , und diese Randorientierung ist so gewählt, dass gilt:

$$d(-x^m) \wedge \eta = d(-x^m) \wedge (-1)^m dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m-1} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

15.2 Der Satz von Stokes

Nun können wir unseren Hauptsatz formulieren und beweisen:

Satz 15.4 (Satz von Stokes). Sei M eine glatte orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und der induzierten Orientierung. Für jede $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ mit kompaktem Träger gilt

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \int_M d\omega, \quad (15.2)$$

wobei $\iota_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung ist.

Proof. Der Beweis ergibt sich aus den folgenden drei Fällen, die wir einzeln behandeln: (1) ω hat seinen Träger in einer Karte U , die diffeomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist. (2) ω hat seinen Träger in einer Karte U , die diffeomorph zu $\mathbb{R}_+^m$ ist. (3) Der allgemeine Fall.

Fall (1): Da $\omega = 0$ auf ∂M gilt, ist $\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = 0$. Um $\int_M d\omega$ zu berechnen, setzen wir

$$\omega = \sum_i (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

wobei die f_i glatte Funktionen mit kompaktem Träger sind. Dann haben wir unter Verwendung der Formel für die äußere Ableitung:

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Nach Definition folgt:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^m \\ &\stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \sum_i \int * \mathbb{R}^{m-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^m \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \sum_i \int * \mathbb{R}^{m-1} \left(\lim_{s \rightarrow \infty} f_i(s) - \lim_{s \rightarrow -\infty} f_i(s) \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^m \\ &= 0, \end{aligned}$$

da f_i einen kompakten Träger hat. Damit ist (15.2) in Fall 1 wahr.

Fall (2): Wir haben dieselbe Formel zur Berechnung von $\int_M d\omega$, mit Ausnahme des Terms für $i = m$, da in diesem Fall eine der Grenzen 0 statt $-\infty$ ist. Wir haben

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f_m}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1}.$$

Andererseits sehen wir, da $x^m = 0$ auf ∂M gilt:

$$\iota_{\partial M}^* \omega = (-1)^{m-1} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} = -f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) \cdot (-1)^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}.$$

Also

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (-f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0)) dx^1 \cdots dx^{m-1} = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_m(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1} = \int_M d\omega,$$

was (15.2) entspricht.

Fall (3): Im Allgemeinen überdecken wir die kompakte Menge $\text{supp}(\omega)$ mit endlich vielen Koordinatenkarten und wählen eine Partition der Eins $\{\psi_i\}$, die dieser Überdeckung untergeordnet ist. Dann gilt

$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \sum_i \int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* (\psi_i \omega) \stackrel{\text{Stokes in einer Karte}}{=} \sum_i \int_M d(\psi_i \omega) = \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \int_M d\omega = \int_M d\omega,$$

da

$$\sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega = \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega = 0.$$

□

Wir sehen einige einfache Konsequenzen:

1. Sei $M = [a, b]$ und $\omega = f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$. Dann ist

$$\int_M df = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = \int_{\partial[a,b]} f = f(b) - f(a).$$

“

2. Wenn $\partial M = \emptyset$, dann gilt für jede $(m-1)$ -Form ω mit kompaktem Träger $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0$. Zum Beispiel gilt für jede glatte Funktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dass $\int_{S^1} df = 0$.

3. **Satz von Green:** Sei D ein kompaktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und $P, Q \in C^\infty(D)$. Dann gilt

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$