

14.4 Integration von Top-Formen auf glatten Mannigfaltigkeiten

Wir nehmen nun an, dass M eine glatte, orientierbare m -Mannigfaltigkeit ist, und fixieren eine Orientierung $\mathcal{A}$ auf M . Es sei ω eine beliebige glatte m -Form auf M . Um $\int_M \omega$ zu definieren, nehmen wir zunächst an, dass ω ihren Träger in einer Koordinatenkarte (φ, U, V) hat, die mit der Orientierung $\mathcal{A}$ kompatibel ist. In diesem Fall existiert eine in U unterstützte Funktion f , so dass

$$\omega = f(\varphi(x))dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

In diesem Fall definieren wir einfach

$$\int_U \omega := \int_V f(x)dx^1 \dots dx^m, \quad (14.5)$$

wobei die rechte Seite das Lebesgue-Integral auf $V \subset \mathbb{R}^m$ ist. Wir setzen voraus, dass f integrierbar ist. In dem, was folgt, sind die auftretenden Funktionen f kompakt unterstützt und folglich integrierbar.

Um eine allgemeine m -Form $\omega \in \Omega^m(M)$ zu integrieren, wählen wir eine lokal endliche Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M aus Karten, die mit der Orientierung $\mathcal{A}$ kompatibel sind. Es sei $\{\psi_\alpha\}$ eine dieser Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da jedes ψ_α in U_α unterstützt ist, ist auch jedes $\psi_\alpha \omega$ in U_α unterstützt. Wir definieren:

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega. \quad (14.6)$$

Wir sagen, dass ω **integrierbar** ist, wenn die rechte Seite für jede solche Überdeckung und jede solche Zerlegung der Eins absolut konvergiert. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn ω kompakt unterstützt ist.

Es bleibt zu überprüfen, dass die Definition (14.6) unabhängig von der Wahl der orientierungskompatiblen Koordinatenkarten und unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins ist.

Satz 14.10. *Angenommen, ω ist kompakt unterstützt oder allgemeiner ω ist integrierbar. Der Ausdruck (14.6) ist unabhängig von der Wahl von $\{U_\alpha\}$ und der Wahl von $\{\psi_\alpha\}$.*

Proof. Wir zeigen zuerst, dass (14.5) wohldefiniert ist. Das Argument ist im Wesentlichen dasselbe wie im euklidischen Fall: Wenn ω in U unterstützt ist und wenn $\{x_\alpha^i\}$ und $\{x_\beta^j\}$ zwei orientierungskompatible Koordinatensysteme auf U sind, so dass

$$\omega = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m = f_\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m,$$

dann wollen wir zeigen, dass

$$\int_{V_\alpha} f_\alpha dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^m = \int_{V_\beta} f_\beta dx_\beta^1 \dots dx_\beta^m$$

gilt. Dies ist korrekt, da

$$dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$$

die Beziehung $f_\alpha = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) f_\beta$ impliziert. Da $\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$ ist, folgt das Resultat aus der Transformationsformel im $\mathbb{R}^n$.

Um zu beweisen, dass (14.6) wohldefiniert ist, nehmen wir an, dass $\{U_\alpha\}$ und $\{U_\beta\}$ zwei lokal endliche Überdeckungen von M aus orientierungskompatiblen Karten sind, und $\{\psi_\alpha\}$ bzw. $\{\rho_\beta\}$ untergeordnete Zerlegungen der Eins zu $\{U_\alpha\}$ und $\{U_\beta\}$ sind. Dann ist $\{U_\alpha \cap U_\beta\}$ eine neue lokal endliche Überdeckung von M und $\{\psi_\alpha \rho_\beta\}$ ist eine dieser neuen Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Es genügt zu zeigen, dass

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \psi_\alpha \rho_\beta \omega$$

gilt. Dies ist der Fall, da für jedes feste α gilt:

$$\int_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} \left(\sum_\beta \rho_\beta \right) \psi_\alpha \omega = \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \psi_\alpha \rho_\beta \omega.$$

□

14.5 Transformationsformel

Schließlich erweitern wir die Transformationsformel vom $\mathbb{R}^m$ auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 14.11. Es seien M, N orientierbare glatte n -Mannigfaltigkeiten mit den Orientierungen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ heißt **orientierungserhaltend**, wenn für jede Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M orientierungskompatibel mit $\mathcal{A}$ ist.

Angenommen, M und N sind zusammenhängend. Es ist leicht zu sehen, dass ein Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ genau dann orientierungserhaltend ist, wenn eine Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ existiert, so dass die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M orientierungskompatibel mit $\mathcal{A}$ ist. Falls analog eine Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ existiert, so dass die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M inkompatibel mit $\mathcal{A}$ ist, dann ist für jede Karte $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$ die Karte $(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$ auf M inkompatibel mit $\mathcal{A}$. In diesem Fall sagen wir, dass φ **orientierungsumkehrend** ist.

Wir formulieren nun:

Satz 14.12 (Die Transformationsformel). *Angenommen, M, N sind n -dimensionale orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \rightarrow N$ ist ein Diffeomorphismus.*

1. Wenn φ orientierungserhaltend ist, dann gilt

$$\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega.$$

2. Wenn φ orientierungsumkehrend ist, then gilt

$$\int_M \varphi^* \omega = - \int_N \omega.$$

Proof. Es genügt, dies in lokalen Karten zu beweisen, in welchem Fall es sich lediglich um die Transformationsformel im $\mathbb{R}^m$ handelt. $\square$

Bemerkung 14.13. Wenn ω eine kompakt unterstützte k -Form auf M mit $k < m = \dim M$ ist, dann kann man ω nicht über M integrieren. Für jede k -dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit $X \subset M$ kann man jedoch $\int_X \omega$ definieren, indem man es auf $\int_X \iota^* \omega$ setzt, wobei $\iota : X \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Auf diese Weise erhalten wir eine „Paarung“ zwischen k -Formen auf M und k -dimensionalen orientierbaren Untermannigfaltigkeiten in M .

14.6 Volumenform und Volumenmaß

Als Nächstes zeigen wir, dass Orientierbarkeit durch die Existenz bestimmter Top-Formen charakterisiert werden kann:

Satz 14.14. *Eine m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn M eine nirgends verschwindende glatte m -Form μ zulässt.*

Proof. Es sei zunächst μ eine nirgends verschwindende glatte m -Form auf M . Dann existiert auf jeder lokalen Karte $(U, x^1, \dots, x^m)$ (wobei U stets als zusammenhängend gewählt wird) eine glatte Funktion $f \neq 0$, so dass $\mu = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ gilt. Daraus folgt:

$$\mu(\partial_1, \dots, \partial_m) = f \neq 0.$$

Wir können eine solche Karte um jeden Punkt stets so wählen, dass $f > 0$ gilt, andernfalls ersetzen wir x^1 durch $-x^1$. Angenommen, $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)$ und $(U_\beta, x_\beta^1, \dots, x_\beta^m)$ seien zwei solche Karten, so dass auf dem Schnitt $U_\alpha \cap U_\beta$

$$f dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m = \mu = g dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = g \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m$$

gilt, wobei $f, g > 0$ sind. Daraus folgt $\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$. Somit bildet der auf diese Weise konstruierte Atlas eine Orientierung.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ eine Orientierung ist. Für jede lokale Karte U_α in $\mathcal{A}$ setzen wir

$$\mu_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m.$$

Wir wählen eine der offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\psi_\alpha\}$. Wir behaupten, dass

$$\mu := \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \mu_{\alpha}$$

eine nirgends verschwindende glatte m -Form auf M ist. In der Tat existiert für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p , so dass die Summe $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \mu_{\alpha}$ eine endliche Summe $\sum_{i=1}^k \psi_i \mu_i$ ist. Daraus folgt nahe p :

$$\mu(\partial_1^1, \dots, \partial_m^1) = \sum_{i=1}^k (\det d\varphi_{1i}) \psi_i > 0.$$

Sodass $\mu \neq 0$ nahe p gilt. □

Definition 14.15. Eine nirgends verschwindende glatte m -Form μ auf einer m -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M wird als *Volumenform* bezeichnet.

Bemerkung 14.16. Wenn M orientierbar ist und μ eine Volumenform ist, dann werden die beiden Orientierungen von M durch μ bzw. $-\mu$ repräsentiert. Wir bezeichnen die beiden Orientierungen mit $[\mu]$ und $[-\mu]$.

Bemerkung 14.17. Insbesondere lassen sich auf jeder Lie-Gruppe Begriffe wie linksinvariante Differentialformen definieren. Da jede Lie-Gruppe orientierbar ist (**Übung**), existiert auf jeder Lie-Gruppe G eine linksinvariante Volumenform. Die mit einer linksinvarianten Volumenform auf Lie-Gruppen assoziierten Maße werden als **Haar-Maße** bezeichnet.