

14. Integration auf Mannigfaltigkeiten

14.1 Zerlegungen der Eins

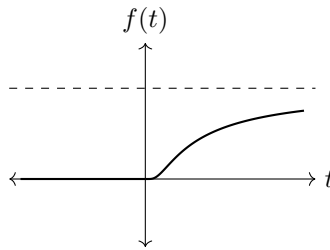
Wir beginnen unsere Diskussion mit einer der wichtigsten Klassen von glatten Funktionen, den sogenannten **Bumpfunktionen** (oder Buckelfunktionen). Rufen Sie sich ins Gedächtnis, dass wir diese Funktionen in unserem Beweis des Tensorcharakterisierungslemmas verwendet haben. Wir beginnen mit der folgenden Tatsache aus der reellen Analysis.

Vorschlag 14.1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (14.1)$$

ist glatt. □

Der Graph der Funktion sieht wie in der folgenden Abbildung aus.



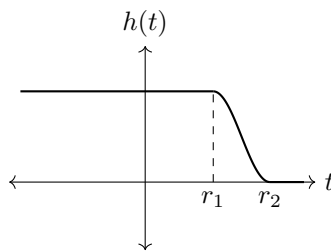
Als Folge davon existiert für beliebige reelle Zahlen r_1 und r_2 mit $r_1 < r_2$ eine glatte Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} h(t) \equiv 1, & t \leq r_1, \\ 0 < h(t) < 1, & r_1 < t < r_2, \\ h(t) \equiv 0, & t \geq r_2 \end{cases}$$

indem wir

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

mit $f(t)$ wie in (14.1) definieren. Ein solches h wird als **Abschneidefunktion** (cutoff function) bezeichnet und sieht wie in der folgenden Abbildung aus.



Wir können diese Konstruktion leicht auf $\mathbb{R}^n$ erweitern, wie das folgende Resultat zeigt.

Vorschlag 14.2. Für beliebige positive reelle Zahlen $r_1 < r_2$ gibt es eine glatte Funktion $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} H(x) \equiv 1, & x \in \overline{B}_{r_1}(0) \\ 0 < H(x) < 1, & x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B}_{r_1}(0) \\ H(x) \equiv 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0). \end{cases} \quad (14.2)$$

Proof. Wir setzen $H(x) = h(|x|)$, wobei h wie oben definiert ist. Offensichtlich ist H glatt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da sie dort eine Komposition glatter Funktionen ist. Da sie auf $B_{r_1}(0)$ identisch gleich 1 ist, ist sie auch dort glatt. □

Die in dieser Proposition konstruierte Funktion H ist ein Beispiel für eine **glatte Bumpfunktion** – eine glatte, reellwertige Funktion, die auf einer vorgegebenen Menge gleich 1 ist und außerhalb einer vorgegebenen Umgebung dieser Menge Null ist.

Wir können nun Zerlegungen der Eins definieren.

Definition 14.3. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine beliebige offene Überdeckung von M . Eine **der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins** ist eine indexierte Familie $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Funktionen $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$ für alle $\alpha \in A$ und alle $x \in M$.
- (ii) $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq U_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$.
- (iii) Die Familie der Träger $(\text{supp } \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich, was bedeutet, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die den Träger $\text{supp } \psi_\alpha$ für nur endlich viele Werte von α schneidet.
- (iv) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist, heißt eine Zerlegung der Eins **glatt**, wenn jede der Funktionen ψ_α glatt ist.

Aufgrund der lokalen Endlichkeitsbedingung (iii) besitzt die Summe in (iv) in einer Umgebung jedes Punktes tatsächlich nur endlich viele von Null verschiedene Terme, sodass keine Konvergenzprobleme auftreten.

Satz 14.4. Angenommen, M ist eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist eine beliebige indexierte offene Überdeckung von M . Dann existiert eine glatte, der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Proof. Jede Menge U_α ist für sich genommen eine glatte Mannigfaltigkeit und besitzt daher eine Basis $\mathcal{B}_\alpha$ aus Koordinatenbällen. Somit ist $\mathcal{B} = \bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ eine Basis für die Topologie von M . Da M eine Mannigfaltigkeit ist, besitzt die Überdeckung $\mathcal{U}$ eine abzählbare, lokal endliche Verfeinerung $\{B_i\}$, die aus Elementen von $\mathcal{B}$ besteht, und die Überdeckung $\{\bar{B}_i\}$ ist ebenfalls lokal endlich.

Für jedes i impliziert die Tatsache, dass B_i ein Koordinatenball in einem U_α ist, dass ein Koordinatenball $B'_i \subseteq U_\alpha$ mit $B'_i \supseteq \bar{B}_i$ sowie eine glatte Koordinatenabbildung $\varphi_i : B'_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\varphi_i(\bar{B}_i) = \bar{B}_{r_i}(0)$ und $\varphi_i(B'_i) = B_{r'_i}(0)$ für gewisse $r_i < r'_i$ gilt. Für jedes i definieren wir eine Funktion $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_i = \begin{cases} H_i \circ \varphi_i & \text{auf } B'_i, \\ 0 & \text{auf } M \setminus \bar{B}_i, \end{cases}$$

wobei $H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die in $B_{r_i}(0)$ positiv und andernorts Null ist, wie in Proposition 14.2. Auf der Menge $B'_i \setminus \bar{B}_i$, wo sich die beiden Definitionen überschneiden, liefern beide Definitionen die Nullfunktion. Daher ist f_i wohldefiniert und glatt, und es gilt $\text{supp } f_i = \bar{B}_i$.

Wir definieren $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_i f_i(x).$$

Aufgrund der lokalen Endlichkeit der Überdeckung $\{\bar{B}_i\}$ besitzt diese Summe in einer Umgebung jedes Punktes nur endlich viele von Null verschiedene Terme und definiert somit eine glatte Funktion. Da jedes f_i überall nicht-negativ und auf B_i positiv ist, und jeder Punkt von M in einem B_i liegt, folgt $f(x) > 0$ überall auf M . Folglich sind die durch $g_i(x) = f_i(x)/f(x)$ definierten Funktionen $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls glatt. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $0 \leq g_i \leq 1$ und $\sum_i g_i \equiv 1$ gelten.

Schließlich müssen wir unsere Funktionen so umindexieren, dass sie durch dieselbe Menge A wie unsere offene Überdeckung indexiert sind. Da die Überdeckung $\{B'_i\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, können wir für jedes i einen Index $a(i) \in A$ so wählen, dass $B'_i \subseteq U_{a(i)}$ gilt. Für jedes $\alpha \in A$ definieren wir $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi_\alpha = \sum_{i: a(i)=\alpha} g_i.$$

Wenn es keine Indizes i gibt, für die $a(i) = \alpha$ gilt, ist diese Summe als die Nullfunktion zu interpretieren. Folglich gilt:

$$\text{supp } \psi_\alpha = \overline{\bigcup_{i: a(i)=\alpha} B_i} = \bigcup_{i: a(i)=\alpha} \bar{B}_i \subseteq U_\alpha.$$

Jedes ψ_α ist eine glatte Funktion, die $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ erfüllt. Zudem ist die Familie der Träger $(\text{supp } \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ nach wie vor lokal endlich und es gilt $\sum_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1$. Dies ist somit die gewünschte Zerlegung der Eins. $\square$

14.2 Top-Formen auf Mannigfaltigkeiten

Es sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Da $\Omega^k(M) = 0$ für $k > n$ gilt, nennen wir jede glatte n -Form eine **Top-Form** auf M . Es sei $p \in M$ und (φ, U) eine lokale Karte um p . Dann ist $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ eine Top-Form auf U . Beachten Sie, dass für jedes $q \in U$ gilt: $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_q \neq 0$, da an jedem $q \in U$

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_q(\partial_1, \dots, \partial_n) = \det(dx^i(\partial_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 1$$

gilt. Da zudem $\dim \Lambda^n T_p^* M = 1$ ist, sehen wir, dass für jede Top-Form ω auf U und jedes $q \in U$ eine reelle Zahl λ_q existiert, so dass

$$\omega_q = \lambda_q(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_q.$$

Da ω von der Klasse C^∞ ist, ist der Koeffizient λ als Funktion auf U ebenfalls C^∞ . Bis auf Multiplikation mit Funktionen gibt es also eine „kanonische Top-Form“ in der Karte. Dies muss global auf M natürlich nicht zutreffen: Für zwei Top-Formen $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$ kann es vorkommen, dass $\omega_p = 0, \omega_q \neq 0$ gilt, während $\eta_p \neq 0, \eta_q = 0$ ist, sodass keine Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $\omega = f\eta$ oder $\eta = f\omega$ existiert.

Insbesondere erhalten wir beim Koordinatenwechsel von $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ zu $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ auf U zwei Top-Formen, nämlich $dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$ und $dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n$. Diese müssen durch eine glatte Funktion auf U miteinander verknüpft sein.

Vorschlag 14.5. Wenn $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um ein Diffeomorphismus ist und $y = \varphi(x)$, dann gilt

$$\varphi^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Proof. Wenn wir $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ schreiben, dann gilt $\varphi^*y^i = y^i \circ \varphi = \varphi^i$. Also:

$$\varphi^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n.$$

Da jedoch

$$d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n(\partial_1^x, \dots, \partial_n^x) = \det(d\varphi_x)$$

gilt, erhalten wir

$$d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^n = \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

$\square$

Es seien nun $(\varphi_\alpha, U, V_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, U, V_\beta)$ zwei Koordinatenkarten. Dann ist die Koordinatenwechselabbildung $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, welche $\varphi_\alpha(x)$ auf $y = \varphi_\beta(x)$ abbildet. Wir erhalten also

$$(\varphi_{\alpha\beta})^*(\varphi_\beta^{-1})^* dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) (\varphi_\alpha^{-1})^* dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

Da $(\varphi_{\alpha\beta})^*(\varphi_\beta^{-1})^* = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta})^* = \varphi_\alpha^{-1*}$ gilt, gelangen wir zu

$$dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

14.3 Orientierbarkeit

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\omega \in \Omega^m(M)$ eine glatte m -Form. Wir wollen das Integral $\int_M \omega$ definieren. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass ω ihren Träger in einer Karte (φ, U, V) mit Koordinaten $\{x^1, \dots, x^m\}$ hat. Dann können wir

$$\omega = f(\varphi(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

schreiben, wobei f eine glatte Funktion auf V ist. Mithilfe der euklidischen Differentialform $f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ auf V ist es naheliegend, das Integral wie folgt zu definieren:

$$\int_U \omega := \int_V f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m. \quad (14.3)$$

Wie üblich muss man dann überprüfen, dass das Integral auf der rechten Seite unabhängig von der Wahl der Koordinatenkarten ist.

Wir betrachten also zwei Koordinatensysteme $(\varphi_\alpha, U, V_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, U, V_\beta)$ auf U mit der Übergangsabbildung $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow V_\beta$, welche $x_\alpha = \varphi_\alpha(x)$ auf $x_\beta = \varphi_\beta(x)$ abbildet. Dann gilt:

$$\omega = f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^m = f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^m.$$

Damit die Definition wohldefiniert ist, benötigen wir also

$$\int_{V_\beta} f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \dots dx_\beta^m = \int_{V_\alpha} f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^m.$$

Unglücklicherweise ist dies nicht immer wahr: Aus der mehrdimensionalen Analysis wissen wir, dass für Integrale von Funktionen mehrerer Variablen

$$\int f(x) dx^1 \dots dx^m$$

gilt: Wenn $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ ein Diffeomorphismus ist, dann gilt die *Transformationsformel* ($y = \varphi(x)$):

$$\int_{V_2} f(y) dy^1 \dots dy^m = \int_{V_1} f(\varphi(x)) |\det(d\varphi)(x)| dx^1 \dots dx^m. \quad (14.4)$$

Um also die Gleichheit

$$\int_{V_\beta} f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \dots dx_\beta^m = \int_{V_\alpha} f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta})(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^m$$

zu garantieren – und damit die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Karten –, müssen wir

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$$

für alle Karten voraussetzen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 14.6. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Zwei Karten $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ und $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$ heißen **orientierungskompatibel**, wenn die Übergangsabbildung $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ die Bedingung

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta})_p > 0$$

für alle $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ erfüllt.

Eine **Orientierung** von M ist ein Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, dessen Karten paarweise orientierungskompatibel sind.

Wir sagen, M ist **orientierbar**, wenn M eine Orientierung besitzt.

Bemerkung 14.7. Es sei U eine Karte mit Koordinaten $\{x^1, \dots, x^m\}$. Wir verwenden die Notation $-U$, um dieselbe Koordinatenkarte U , jedoch mit „gespiegelten“ Koordinaten $\{-x^1, x^2, \dots, x^m\}$ darzustellen. Dann sind $-U$ und U nicht orientierungskompatibel. Es sei $\tilde{U}$ eine beliebige andere Koordinatenkarte, so dass $\tilde{U} \cap U \neq \emptyset$ zusammenhängend ist. Dann gilt entweder, dass

- $\tilde{U}$ und U orientierungskompatibel sind,

oder, dass

- $\tilde{U}$ und $-U$ orientierungskompatibel sind.

Als Konsequenz sehen wir sofort:

Folge 14.8. Wenn M zusammenhängend und orientierbar ist, dann lässt M genau zwei verschiedene Orientierungen zu.

Beispiel 14.9. Für den reellen projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ haben wir einen Atlas konstruiert, der aus $n+1$ Karten besteht. Wir haben gesehen, dass $\mathbb{RP}^n$ für ungerades n orientierbar ist. Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{RP}^n$ für gerades n nicht orientierbar ist.