

- Für $k = 2$, d.h. $\omega \in \Omega^2(U)$, kann man durch eine langwierige Rechnung zeigen, dass für die $C^\infty(U)$ -trilineare Abbildung

$$d\omega : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U)$$

gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = & X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ & - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Dies führt uns zur folgenden *invarianten Formel* für $d\omega$:

Satz 13.17. Für jede $\omega \in \Omega^k(U)$ ist die $(k+1)$ -Form $d\omega$, aufgefasst als $C^\infty(U)$ -multilineare Abbildung

$$d\omega : \underbrace{\Gamma(TU) \times \dots \times \Gamma(TU)}_{k+1\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(U),$$

gegeben durch die Formel

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \quad (13.18)$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \quad (13.19)$$

Proof. Definiere $d\omega$ über die Formel in (13.19). Wir müssen zeigen, dass

1. $d\omega$ ein alternierender Tensor ist, d. h. für alle $m < n$ gilt:

$$d\omega(X_1, \dots, X_m, \dots, X_n, \dots, X_{k+1}) = -d\omega(X_1, \dots, X_n, \dots, X_m, \dots, X_{k+1}).$$

Dass dies wahr ist, kann mithilfe von (13.19) überprüft werden.

- (2) $d\omega$ multilinear, genauer gesagt $C^\infty(U)$ -linear auf U ist. Beachten Sie, dass $d\omega$ offensichtlich $\mathbb{R}$ -linear ist. Wir beweisen, dass für jedes $f \in C^\infty(U)$ gilt:

$$d\omega(fX_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = fd\omega(X_1, \dots, X_{k+1}).$$

Berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} d\omega(fX_1, X_2, \dots, X_{k+1}) &= fX_1(\omega(X_2, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i>1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(fX_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i>1} (-1)^{1+i} \omega([fX_1, X_i], X_2, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{1<i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], fX_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\ &= fd\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i>1} (-1)^{i-1} (X_i f) \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad - \sum_{i>1} (-1)^{1+i} (X_i f) \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &= fd\omega(X_1, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Gleichheitszeichen die Eigenschaft $([fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X)$ verwendet haben.

- (3) Wir überprüfen nun, dass $d\omega$ den lokalen Ausdruck (13.17) besitzt. Dies ist eine Übungsaufgabe.

□

Wir erhalten für das Dachprodukt, das innere Produkt und die Pullbacks (Rückzüge) von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten dieselben Formeln, wie wir sie für Formen auf Vektorräumen hatten.

Das *Dachprodukt* (oder äußere Produkt) $\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \rightarrow \Omega^{k+l}(U)$.

Zum Beispiel:

$$(dx^1 + 2dx^2) \wedge (dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 + 3dx^1 \wedge dx^3) = -7dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Für jedes $V \in \Gamma(TM)$ haben wir das *innere Produkt* $i_V : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ mit

$$V \lrcorner \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = i_V \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(V, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

Für jede glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ hat man den *Pullback* $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$. Dieser ist punktweise über die lineare Abbildung $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ definiert. Wenn also $\omega \in \Omega^k(N)$, dann gilt:

$$(F^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_k)).$$

Wir listen alle Eigenschaften im Zusammenhang mit Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten auf.

Lemma 13.18. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Angenommen, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ und $F : M \rightarrow N$ sei eine glatte Abbildung. Dann gilt:

1. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.
2. $F^*(\omega \wedge \eta) = F^* \omega \wedge F^* \eta$.
3. $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X \eta$.
4. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
5. $i_X \circ i_X = 0$.
6. $d \circ d = 0$.
7. $F^* \circ d = d \circ F^*$.

Proof. Der Beweis verläuft analog zu den Beweisen, die wir für Vektorräume gesehen haben. □

Definition 13.19. Eine Differentialform ω heißt **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt **exakt**, wenn $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$. Da $d \circ d = 0$, erhalten wir:

Jede exakte Form ist geschlossen.

13.6 Lie-Ableitungen von Differentialformen

Wir haben in § ?? Formeln zur Berechnung von Lie-Ableitungen glatter Tensorfelder hergeleitet, welche gleichermaßen auf Differentialformen anwendbar sind. Im Fall von Differentialformen liefert die äußere Ableitung jedoch eine wesentlich mächtigere Formel zur Berechnung von Lie-Ableitungen, was auch bedeutende theoretische Konsequenzen hat.

Die Konzepte, die wir verstehen wollen, betreffen das Verhalten der Lie-Ableitung bezüglich: Dachprodukten, inneren Produkten und der äußeren Ableitung. Wir beginnen mit dem Dachprodukt und erinnern daran, dass das Dachprodukt $\omega \wedge \eta$ die Schiefsymmetrisierung des Tensorprodukts ist. Zudem zeigt Proposition 12.19, dass $\mathcal{L}_V(A \otimes B) = \mathcal{L}_V A \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$ gilt. Somit erhalten wir das Folgende:

Vorschlag 13.20. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $V \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega, \eta \in \Omega^*(M)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}_V(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_V \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_V \eta).$$

Das nächste Theorem ist eine der wichtigsten Gleichungen über die Ableitungen von Differentialformen. Es liefert eine bemerkenswerte Formel für Lie-Ableitungen von Differentialformen, die auf Élie Cartan zurückgeht, den französischen Mathematiker, der die Theorie der Differentialformen erfunden hat.

Satz 13.21 (Cartans magische Formel). Auf einer glatten Mannigfaltigkeit M gilt für jedes glatte Vektorfeld V und jede glatte Differentialform ω :

$$\mathcal{L}_V \omega = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega). \quad (13.20)$$

Proof. Wir beweisen durch Induktion nach k , dass (13.20) für glatte k -Formen gilt. Wir beginnen mit einer glatten 0-Form f , wobei

$$V \lrcorner (df) + d(V \lrcorner f) = V \lrcorner df = df(V) = Vf = \mathcal{L}_V f,$$

was gerade (13.20) entspricht.

Es sei nun $k \geq 1$ und angenommen, (13.20) sei bereits für Formen mit einem Grad kleiner als k bewiesen. Es sei ω eine beliebige glatte k -Form, die in glatten lokalen Koordinaten geschrieben ist als

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wir möchten die Induktionsvoraussetzung und den Induktionsanfang nutzen, daher schreiben wir $f = x^{i_1}$ sowie $\beta = \omega_I dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und stellen fest, dass jeder Term im Ausdruck von ω in der Form $df \wedge \beta$ geschrieben werden kann, wobei f eine glatte Funktion und β eine glatte $(k-1)$ -Form ist. Aus Korollar ?? wissen wir, dass $\mathcal{L}_V df = d(\mathcal{L}_V f) = d(Vf)$ gilt. Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(df \wedge \beta) &= (\mathcal{L}_V df) \wedge \beta + df \wedge (\mathcal{L}_V \beta) \\ &= d(Vf) \wedge \beta + df \wedge (V \lrcorner d\beta + d(V \lrcorner \beta)). \end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir unter Beachtung von $V \lrcorner df = df(V) = Vf$:

$$\begin{aligned} V \lrcorner d(df \wedge \beta) + d(V \lrcorner (df \wedge \beta)) &= V \lrcorner (-df \wedge d\beta) + d((Vf)\beta - df \wedge (V \lrcorner \beta)) \\ &= -(Vf)d\beta + df \wedge (V \lrcorner d\beta) + d(Vf) \wedge \beta + (Vf)d\beta + df \wedge d(V \lrcorner \beta), \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache verwendet haben, dass $V \lrcorner (\omega \wedge \eta) = (V \lrcorner \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (V \lrcorner \eta)$ gilt. Somit ist

$$\mathcal{L}_V(df \wedge \beta) = V \lrcorner d(df \wedge \beta) + d(V \lrcorner (df \wedge \beta))$$

und (13.20) folgt per Induktion. □

Wir erhalten das folgende Korollar.

Folge 13.22 (Lie-Ableitung kommutiert mit d). Wenn V ein glattes Vektorfeld und ω eine glatte Differentialform ist, dann gilt:

$$\mathcal{L}_V(d\omega) = d(\mathcal{L}_V \omega).$$

Proof. Dies folgt aus Cartans Formel und der Tatsache, dass $d \circ d = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V d\omega &= V \lrcorner d(d\omega) + d(V \lrcorner d\omega) = d(V \lrcorner d\omega); \\ d\mathcal{L}_V \omega &= d(V \lrcorner d\omega) + d(d(V \lrcorner \omega)) = d(V \lrcorner d\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Aufgabe 13.23. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V \in \mathfrak{X}(M)$.

- Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_V \circ i_V = i_V \circ \mathcal{L}_V$ gilt.
- Zeigen Sie, dass $i_V \circ \mathcal{L}_V \omega = i_V(V \lrcorner d\omega)$ für jede glatte Form ω gilt.

Unter Verwendung der invarianten Formel (13.19) für $d\omega$ und Cartans magischer Formel erhalten wir eine weitere Formel für die Lie-Ableitung einer Form.

Vorschlag 13.24. Wenn ω eine glatte k -Form und $X, Y_1, \dots, Y_k$ glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M sind, dann gilt:

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y_1, \dots, Y_k) = X(\omega(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_k). \quad (13.21)$$