

13.4 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Nachdem wir äußere Formen auf Vektorräumen und die verschiedenen Operationen im Zusammenhang mit Differentialformen verstanden haben, setzen wir nun $V = T_p M$, wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ist, und bilden die vorangegangenen Abschnitte nach. Dies führt zum Begriff des Raumes der Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit sowie zu Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten selbst.

Wir bezeichnen die Teilmenge von $T^k T^* M$, die aus alternierenden Tensoren besteht, mit $\Lambda^k T^* M$:

$$\Lambda^k T^* M = \prod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M).$$

Wie zuvor ist $\Lambda^k T^* M$ für jedes $p \in M$ ein $\binom{n}{k}$ -dimensionaler Vektorraum.

Definition 13.12. Eine **Differential- k -Form** ist ein Tensorfeld, dessen Wert an jedem Punkt ein alternierender Tensor ist. Die ganze Zahl k wird als **Grad** der Form bezeichnet, und wir bezeichnen den Vektorraum der glatten k -Formen mit

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M).$$

Das Dachprodukt (Keilprodukt) von zwei Differentialformen wird punktweise definiert: $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$. Somit ist das Dachprodukt einer k -Form mit einer l -Form eine $(k+l)$ -Form. Wenn f eine 0-Form und η eine k -Form ist, interpretieren wir das Dachprodukt $f \wedge \eta$ als das gewöhnliche Produkt $f\eta$. Wenn wir

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M) \quad (13.11)$$

definieren, macht das Dachprodukt $\Omega^*(M)$ zu einer assoziativen, antikommutativen graduierten Algebra.

In jeder glatten Karte kann eine k -Form ω lokal geschrieben werden als

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

wobei die Koeffizienten ω_I stetige Funktionen auf dem Koordinatengebiet sind. Beachten Sie, dass

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \dots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}$$

und die Komponentenfunktionen ω_I von ω bestimmt sind durch

$$\omega_I = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Wir geben hier lediglich die Ausdrücke für den Rückzug (Pullback) von Differentialformen an, welche Spezialfälle des Rückzugs von Tensorfeldern aus § ?? sind. Angenommen, $F: M \rightarrow N$ ist glatt. Dann gilt

$$F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta), \quad (13.12)$$

und der lokale Koordinatenausdruck lautet

$$F^* \left(\sum_{I-\text{aufsteigend}} \omega_I dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \right) = \sum_{I-\text{aufsteigend}} (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

Betrachten wir ein explizites Beispiel.

Beispiel 13.13. Definiere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $F(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ und sei ω die 2-Form $y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$ auf \mathbb{R}^3 . Der Rückzug $F^*\omega$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} F^*(y dx \wedge dz + x dy \wedge dz) &= v du \wedge d(u^2 - v^2) + u dv \wedge d(u^2 - v^2) \\ &= v du \wedge (2u du - 2v dv) + u dv \wedge (2u du - 2v dv) \\ &= -2v^2 du \wedge dv + 2u^2 dv \wedge du = -2(u^2 + v^2) du \wedge dv, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache genutzt haben, dass $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ und $du \wedge dv = -dv \wedge du$ aufgrund der Antikommutativität gilt.

Die innere Multiplikation (Interior Product) lässt sich ebenfalls natürlich auf Vektorfelder und Differentialformen erweitern, indem sie punktweise wirkt: Wenn $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$, definieren wir eine $(k - 1)$ -Form $X \lrcorner \omega = i_X \omega$ durch

$$(X \lrcorner \omega)_p = X_p \lrcorner \omega_p.$$

13.5 Äußere Ableitung

In diesem Abschnitt definieren wir einen natürlichen und wahrscheinlich den wichtigsten Differentialoperator auf glatten Formen, die sogenannte **äußere Ableitung**. Sie ist eine Verallgemeinerung des Differentials einer Funktion.

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M werden wir zeigen, dass es einen Differentialoperator $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ gibt, der $d(d\omega) = 0$ für alle ω erfüllt. Wir gehen dabei schrittweise vor. Zuerst zeigen wir die Definition des Operators d auf \mathbb{R}^n und nutzen dies, um die Existenz eines Operators d auf jeder glatten Mannigfaltigkeit zu beweisen, der die gewünschten Eigenschaften aus dem \mathbb{R}^n erfüllt. Wir tun dies, indem wir eine invariante Formel für die äußere Ableitung d angeben.

Die Definition von d im euklidischen Raum lautet wie folgt:

Definition 13.14. Sei $\omega = \sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ eine glatte k -Form auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir definieren ihre **äußere Ableitung** $d\omega \in \Omega^{k+1}$ durch

$$d \left(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}, \tag{13.13}$$

wobei $d\omega_J$ das Differential der Funktion ω_J ist. Somit kann (13.13) geschrieben werden als

$$d \left(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) = \sum_J \sum_i \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \tag{13.14}$$

Wenn ω beispielsweise eine 1-Form ist, impliziert (13.14)

$$\begin{aligned} d(\omega_j dx^j) &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i > j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

nachdem wir i und j in der zweiten Summe vertauscht und die Tatsache $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ verwendet haben. Für eine glatte 0-Form f impliziert (13.14)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

was genau das Differential von f ist.

Betrachten wir einige Eigenschaften der äußeren Ableitung im \mathbb{R}^n , bevor wir ihre Definition auf einer Mannigfaltigkeit betrachten.

Vorschlag 13.15. Die äußere Ableitung d erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(a) d ist linear über \mathbb{R} .

(b) Wenn $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\eta \in \Omega^l(U)$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \quad (13.15)$$

(c) $d \circ d \equiv 0$. Dies zeigt insbesondere, dass $\text{Im}(d_{k-1}) \subset \ker(d_k)$.

(d) d kommutiert mit Rückzügen: Für offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, eine glatte Abbildung $F: U \rightarrow V$ und eine Form $\omega \in \Omega^k(V)$ gilt

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega). \quad (13.16)$$

Proof. Die Linearität von d ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition. Um (b) zu beweisen, genügt es aufgrund der Linearität, Terme der Form $\omega = u dx^I \in \Omega^k(U)$ und $\eta = v dx^J \in \Omega^l(U)$ für glatte reellwertige Funktionen u und v zu betrachten. Wir berechnen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d((u dx^I) \wedge (v dx^J)) \\ &= d(uv dx^I \wedge dx^J) \quad (\text{Linearität von } \wedge \text{ über } C^\infty(M)) \\ &= (v du + u dv) \wedge dx^I \wedge dx^J \quad (\text{Produktregel}) \\ &= (du \wedge dx^I) \wedge (v dx^J) + (-1)^k (u dx^I) \wedge (dv \wedge dx^J) \quad (\text{Assoziativität von } \wedge) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

wobei der Faktor $(-1)^k$ daher rührt, dass $dv \wedge dx^I = (-1)^k dx^I \wedge dv$, da dv eine 1-Form und dx^I eine k -Form ist.

Beachten Sie, dass die gemischten zweiten Ableitungen für Funktionen kommutieren, daher gilt $d \circ d = 0$ für 0-Formen, d.h. für $f \in C^\infty(M)$.

Wir beweisen (c) zuerst für Funktionen (0-Formen). In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} d(du) &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall haben wir

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_{J\text{-aufsteigend}} d\omega_J \wedge dx^J\right) \\ &= \sum_{J\text{-aufsteigend}} d(d\omega_J) \wedge dx^J - \sum_{J\text{-aufsteigend}} d\omega_J \wedge d(dx^J) \quad (\text{unter Verwendung von (b)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir den Fall $k = 0$ für die Funktionen ω_J verwendet haben.

Schließlich, um (d) zu beweisen, genügt es wieder, $\omega = u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ zu betrachten. Für eine solche Form ist die linke Seite von (13.16)

$$\begin{aligned} F^*(d(u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= F^*(du \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F), \end{aligned}$$

und die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} d(F^*(u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) &= d((u \circ F) d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F)) \\ &= d(u \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F), \end{aligned}$$

sodass sie gleich sind. □

Wir möchten nun die Situation im \mathbb{R}^n nachahmen und die äußere Ableitung auf Mannigfaltigkeiten definieren. Offensichtlich möchten wir, dass der äußere Ableitungsoperator $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ die Eigenschaften aus Proposition 13.15 erfüllt. Er sollte auch das Differential von Funktionen verallgemeinern. Im Gegensatz zum Dachprodukt, dem inneren Produkt und den Rückzugoperationen, die wir früher definiert haben, ist die äußere Ableitung keine punktweise Operation, sondern eine lokale Operation (d.h. sie hängt von den „nahegelegenen Werten“ ab).

Sei $U \subset M$ offen. Für $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ haben wir bereits gesehen, dass $df \in \Omega^1(U)$. Wir erhalten also eine lineare Abbildung

$$d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U), \quad f \mapsto df.$$

Lokal in jeder Koordinatenkarte haben wir

$$df = \sum_i (\partial_i f) dx^i,$$

wobei wir die Kurzschreibweise $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ verwenden. Wir haben auch eine „invariante Definition“ von $df \in \Omega^1(U)$ über

$$df(X) = Xf, \quad \forall X \in \Gamma(TU).$$

Nun sei ω eine k -Form auf M , sodass lokal gilt

$$\omega = \sum_I \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wir verwenden (13.13), um die folgende Definition zu geben:

Definition 13.16. Die äußere Ableitung von $\omega \in \Omega^k(U)$ ist die $(k+1)$ -Form $d\omega$, gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_I d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{I, i} \partial_i(\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned} \tag{13.17}$$

Bevor wir fortfahren, müssen wir klarstellen, dass das oben definierte $d\omega$ wohldefiniert ist. Mit anderen Worten: Die $(k+1)$ -Form $d\omega$ sollte unabhängig von der Wahl der Koordinatenkarten sein.

Dies können wir entweder dadurch zeigen, dass (13.17) bei einem Wechsel der Koordinatenkarte unverändert bleibt, oder indem wir eine äquivalente, koordinatenfreie Definition angeben (üblicherweise die invariante Formulierung). Wir wählen hier den zweiten Ansatz, der die Existenz des Operators d auf M beweist, welcher – eingeschränkt auf eine Koordinatenkarte (U, x) – zu (13.17) führt.

Beginnen wir mit kleinen k , um die invariante Formel für $d\omega$ zu finden:

- Für $k = 0$, d.h. $\omega = f \in C^\infty(U)$, können wir df als eine $C^\infty(U)$ -lineare Abbildung

$$df : \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U)$$

betrachten, für die gilt:

$$df(X) = Xf.$$

- Für $k = 1$, d.h. $\omega \in \Omega^1(U)$, ist $d\omega \in \Omega^2(U)$ und sollte daher zwei Vektorfelder als Argumente und eine Funktion als Ergebnis haben:

$$d\omega : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U).$$

Unter Verwendung der Formel (13.17) erhalten wir einen invarianten Ausdruck. Schreiben wir $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$, $X = \sum_k X^k \partial_k$ und $Y = \sum_l Y^l \partial_l$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \sum_{i, j, k, l} (\partial_j \omega_i) dx^j \wedge dx^i (X^k \partial_k, Y^l \partial_l) \\ &= \sum_{i, j} ((\partial_j \omega_i) X^j Y^i - (\partial_j \omega_i) X^i Y^j) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

- Für $k = 2$, d.h. $\omega \in \Omega^2(U)$, kann man durch eine langwierige Rechnung zeigen, dass für die $C^\infty(U)$ -trilineare Abbildung

$$d\omega : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U)$$

gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = & X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ & - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Dies führt uns zur folgenden *invarianten Formel* für $d\omega$:

Satz 13.17. Für jede $\omega \in \Omega^k(U)$ ist die $(k + 1)$ -Form $d\omega$, aufgefasst als $C^\infty(U)$ -multilineare Abbildung

$$d\omega : \underbrace{\Gamma(TU) \times \dots \times \Gamma(TU)}_{k+1\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(U),$$

gegeben durch die Formel

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \quad (13.18)$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \quad (13.19)$$