

Lesung 2

2. Glatte Strukturen

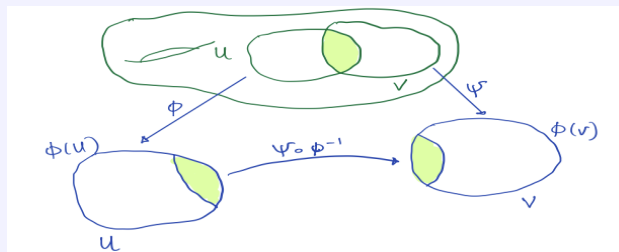
Wir erinnern an die Definition glatter Abbildungen zwischen euklidischen Räumen. Zur Erinnerung: Sind $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, so wird eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ als **glatt** oder C^∞ bezeichnet, wenn jede ihrer Teilfunktionen stetige partielle Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Ist f darüber hinaus eine Bijektion und ist auch f^{-1} glatt, so spricht man von einem **glatten Diffomorphismus**. Da jede topologische Mannigfaltigkeit lokal wie eine offene Teilmenge eines euklidischen Raums aussieht, ist es sinnvoll, zu versuchen, glatte Abbildungen auf einer topologischen Mannigfaltigkeit zu definieren.

Wir möchten definieren, wann eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt ist, wobei M eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dazu müssen wir der Mannigfaltigkeit eine genauere Struktur geben. Wir beginnen mit folgendem

Definition 2.1. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und seien (U, ϕ) und (V, ψ) zwei Koordinatensysteme, sodass $U \cap V \neq \emptyset$ gilt. Die Abbildung

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (2.1)$$

wird als **Übergangsabbildung von ϕ nach ψ** bezeichnet.



Wir definieren Folgendes

Definition 2.2. Seien $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ und $\psi : V \rightarrow \tilde{V}$ zwei Koordinatensysteme auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Sie werden als **glatt kompatibel** oder C^∞ -**kompatibel** bezeichnet, wenn

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (2.2)$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Nachdem wir die Definition glatt kompatibler Koordinatensysteme verstanden haben, definieren wir nun, was ein Atlas und ein glatter Atlas ist.

Definition 2.3. Eine Menge von Kartierungen $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$, $i \in I$, von M wird als **Atlas** von M bezeichnet, wenn die Definitionsbereiche der Kartierungen M abdecken, d. h.

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M.$$

Ein Atlas \mathcal{A} wird als **glatter Atlas** oder als C^∞ -**Atlas** bezeichnet, wenn beliebige zwei Kartierungen in \mathcal{A} C^∞ -kompatibel sind.

Um zu beweisen, dass ein Atlas ein glatter Atlas ist, müssten wir lediglich nachweisen, dass jede Übergangsabbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ glatt ist, wann immer (U, ϕ) und (V, ψ) Koordinatensysteme in \mathcal{A} sind, da $\psi \circ \phi^{-1}$ offensichtlich ein Diffomorphismus ist, weil $(\psi \circ \phi^{-1})^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}$ ist und letztere eine der Übergangsabbildungen ist, die glatt ist.

2.1 Beispiele für glatte Atlanten

Beispiel 2.4. Sei $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\mathcal{A} = \{id : U \rightarrow U\}$ ein C^∞ -Atlas.

Beispiel 2.5. Für $M = S^n$ erinnern wir uns an die Kartierungen aus Beispiel ?? . Betrachten wir $\mathcal{A} = \{(x_1 : U_1 \rightarrow V_1), (x_2 : U_2 \rightarrow V_2)\}$, wobei $U_1 = S^n \setminus \{s\}$ und $U_2 = S^n \setminus \{n\}$. Wir erinnern uns auch daran, dass

$$\begin{aligned} x_1(y) &= \frac{2}{1+y^0} \hat{y}, \quad \text{wobei } y = (y^0, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ x_1^{-1}(z) &= \frac{1}{4 + \|z\|^2} (4 - \|z\|^2, 4z), \quad z \in S^n, \\ x_2(y) &= \frac{2}{1-y^0} \hat{y}. \end{aligned}$$

Somit gilt für jedes $v \in x_1(U_1 \cap U_2)$:

$$\begin{aligned} x_2 \circ x_1^{-1}(v) &= x_2 \left(\frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}, \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \right) \\ &= \frac{2}{1 - \frac{4 - \|v\|^2}{4 + \|v\|^2}} \frac{4v}{4 + \|v\|^2} \\ &= \frac{4v}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Somit ist $x_2 \circ x_1^{-1} C^\infty$. Analog ist auch $x_1 \circ x_2^{-1}$ glatt, wodurch x_1 und x_2 C^∞ -kompatibel sind und \mathcal{A} ein C^∞ -Atlas für S^n ist.

Beispiel 2.6. Erinnern wir uns an den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ und seine Koordinatensysteme aus Beispiel ?? . Man kann berechnen, dass für beispielsweise $i > j$ und $(u^1, \dots, u^n) \in (U_i \cap U_j)$ gilt:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left(\frac{u^1}{u^j}, \dots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^{i+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^n}{u^j} \right),$$

die lediglich rationale Funktionen und somit C^∞ sind. Somit erhalten wir einen glatten Atlas für $\mathbb{R}P^n$.

Wir werden später weitere Beispiele betrachten. Aber erinnern wir uns vorerst daran, dass wir diesen Begriff des glatten Atlas eingeführt haben, weil wir definieren wollten, wann eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Wir möchten sagen, dass $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist, wenn $f \circ \phi^{-1}$ im Sinne der gewöhnlichen Analysis für jede Koordinatenkarte (U, ϕ) im Atlas glatt ist. Diese Definition weist ein kleines Problem auf. Es kann vorkommen, dass verschiedene Atlanten zu „derselben“ glatten Struktur auf M führen. Um Redundanzen zu vermeiden, geben wir die folgende Definition an.

Definition 2.7. Ein C^∞ -Atlas \mathcal{A}_{max} wird als **maximaler Atlas** oder als **differenzierbare Struktur auf M** bezeichnet, wenn jede Karte, die glatt kompatibel mit allen Karten in \mathcal{A}_{max} ist, bereits in \mathcal{A}_{max} enthalten ist. Mit anderen Worten:

$$\mathcal{A}_{max} := \{\text{Karten } (U, \phi) \text{ im Atlas } \mathcal{A} \text{ von } M \mid \phi \text{ ist } C^\infty\text{-kompatibel mit allen Karten in } \mathcal{A}\}. \quad (2.3)$$

Offensichtlich ist \mathcal{A}_{max} ebenfalls ein C^∞ -Atlas. Sind ϕ, ψ zwei Kartierungen von M , die mit allen Kartierungen in \mathcal{A} C^∞ -kompatibel sind, dann sind ϕ und ψ untereinander C^∞ -kompatibel, denn wenn $x \in \phi(U \cap V)$, dann existiert eine Kartierung $\tau : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ in \mathcal{A} existiert, sodass $\phi^{-1}(x) \in \tilde{U}$ gilt. In der Nähe von x gilt also

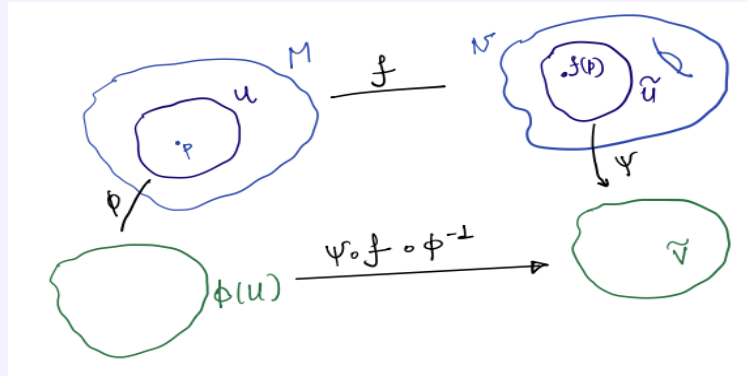
$$\psi \circ \phi^{-1} = \underbrace{(\psi \circ \tau^{-1})}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\tau \circ \phi^{-1})}_{C^\infty}.$$

Definition 2.8. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit. Ein Paar (M, \mathcal{A}_{max}) , wobei \mathcal{A}_{max} ein maximaler Atlas auf M ist, wird als **n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit** bezeichnet.

Mit dieser Definition können wir nun endlich die Differenzierbarkeit von Funktionen definieren.

Definition 2.9. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ wird als k -mal stetig differenzierbar in p oder C^k in p bezeichnet, wenn es eine Koordinateneinteilung C gibt, $\phi : U \rightarrow V \in \mathcal{A}_{max}(M)$ mit $p \in U$ und eine weitere Koordinateneinteilung $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \in \mathcal{A}_{max}(N)$ mit $f(p) \in \tilde{U}$ und $f(U) \subset \tilde{U}$ existiert, sodass

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \tilde{V} \text{ ist } C^k. \quad (2.4)$$



Definition 2.10. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Homöomorphie $f : M \rightarrow N$ wird als C^k -Diffeomorphismus bezeichnet, wenn sowohl f als auch f^{-1} C^k sind. In diesem Fall werden M und N als C^k -diffeomorph bezeichnet.

Bevor wir uns Beispiele für glatte Abbildungen ansehen, wollen wir uns noch weitere Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten ansehen.

Bemerkung 2.11. Wir betonen, dass eine glatte Struktur eine zusätzliche Information ist, die wir einer topologischen Mannigfaltigkeit M zuordnen. Wenn wir also sagen, dass M eine „glatte Mannigfaltigkeit“ ist, dann ist bereits impliziert, dass ein glatter maximaler Atlas vorgegeben ist. Es kann vorkommen, dass eine gegebene topologische Mannigfaltigkeit viele verschiedene glatte Strukturen hat. Betrachten wir zum Beispiel die Homöomorphie

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = x^3.$$

Der Atlas (\mathbb{R}, ψ) ist eine glatte Struktur auf \mathbb{R} , aber er ist **nicht** C^∞ -kompatibel mit der Standard-glatte Struktur (\mathbb{R}, id) auf \mathbb{R} , denn

$$id \circ \psi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

am Punkt $\{0\}$ nicht glatt ist. Somit sind die beiden glatten Strukturen unterschiedlich.

Aufgabe 2.12. Sei M eine nichtleere topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Angenommen, M hat eine glatte Struktur. Zeige, dass M unzählbar viele verschiedene glatte Strukturen hat.

Bemerkung 2.13. Tatsächlich kann es vorkommen, dass eine topologische Mannigfaltigkeit überhaupt keine glatten Strukturen hat. Das erste Beispiel wurde von Kervaire [Ker60] für eine kompakte 10-dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben.

Obwohl es verlockend erscheint, eine glatte Struktur durch die explizite Beschreibung eines maximalen glatten Atlas zu definieren, ist dies nicht immer zweckmäßig, da dieser viele Karten enthalten kann und es dadurch schwieriger werden könnte, die Angaben explizit zu überprüfen. Dies lässt sich durch das folgende Ergebnis beheben.

Vorschlag 2.14. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

1. Jeder glatte Atlas \mathcal{A} von M ist in einem eindeutigen maximalen glatten Atlas \mathcal{A}_{max} enthalten. Ein solcher \mathcal{A}_{max} wird auch als die **durch \mathcal{A} bestimmte glatte Struktur** bezeichnet.
2. Zwei glatte Atlanten von M bestimmen genau dann dieselbe glatte Struktur, wenn ihre Vereinigung ein glatter Atlas ist.

Proof. 1. Wir haben bereits die Existenz eines solchen \mathcal{A}_{max} bewiesen. Um die Eindeutigkeit zu beweisen, beachte man, dass, wenn \mathcal{B} ein beliebiger anderer maximaler glatter Atlas ist, der \mathcal{A} enthält, dann jede seiner Karten mit jeder Karte in \mathcal{A} C^∞ -kompatibel ist und somit per Definition $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{max}$ gilt. Analog gilt $\mathcal{A}_{max} \subset \mathcal{B}$ und somit $\mathcal{A}_{max} = \mathcal{B}$.

2. Übung.

□

References

- [Ker60] Michel A. Kervaire. “A manifold which does not admit any differentiable structure”. English. *Comment. Math. Helv.* 34 (1960), pp. 257–270. DOI: [10.1007/BF02565940](https://doi.org/10.1007/BF02565940). Zbl: [0145.20304](https://zbmath.org/?q=sernum/0145.20304) (cit. on p. 11).