

**Definition 13.2.** Ein kovarianter  $k$ -Tensor  $\alpha$  auf  $V$  heißt **alternierend** oder **schiefsymmetrisch**, wenn er sein Vorzeichen wechselt, wann immer zwei seiner Argumente miteinander vertauscht werden. Das heißt, für alle Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in V$  und jedes Paar verschiedener Indizes  $i, j$  gilt

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k). \quad (13.2)$$

Alternierende kovariante  $k$ -Tensoren werden auch als **äußere Formen** bezeichnet.

Sowie zur Erinnerung: Für jede Permutation  $\sigma \in S_k$  ist das **Vorzeichen** (oder das **Signum**) von  $\sigma$ , bezeichnet mit  $\text{sgn } \sigma$ , gleich  $+1$ , wenn  $\sigma$  gerade ist, und  $-1$ , wenn  $\sigma$  ungerade ist. Folglich impliziert (13.2), dass für einen alternierenden Tensor  $\alpha$ , beliebige Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  und jede Permutation  $\sigma \in S_k$  gilt:

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k),$$

und die Komponenten  $\alpha_{i_1 \dots i_k}$  von  $\alpha$  wechseln das Vorzeichen, wann immer zwei Indizes miteinander vertauscht werden.

**Notation.** Der Vektorraum aller alternierenden  $k$ -Tensoren auf  $V$  wird mit  $\Lambda^k(V^*)$  bezeichnet. Offensichtlich sind alle 0-Tensoren und 1-Tensoren alternierend.

**Vorschlag 13.3.** Es sei  $\alpha$  ein kovarianter  $k$ -Tensor auf einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a)  $\alpha$  ist alternierend.
- (b)  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ , wann immer das  $k$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_k)$  linear abhängig ist.
- (c)  $\alpha$  liefert den Wert Null, wann immer zwei seiner Argumente gleich sind:

$$\alpha(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_k) = 0.$$

*Beweis.* Die Implikationen (a)  $\Rightarrow$  (c) und (b)  $\Rightarrow$  (c) sind unmittelbar ersichtlich. Wir vervollständigen den Beweis, indem wir zeigen, dass (c) sowohl (a) als auch (b) impliziert.

Nehmen wir an, dass  $\alpha$  die Bedingung (c) erfüllt. Für beliebige Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  impliziert die Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Folglich ist  $\alpha$  alternierend. Wenn andererseits  $(v_1, \dots, v_k)$  ein linear abhängiges  $k$ -Tupel ist, dann lässt sich einer der Vektoren  $v_i$  als Linearkombination der anderen schreiben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass

$$v_k = \sum_{j=1}^{k-1} a^j v_j$$

gilt. Dann impliziert die Multilinearität von  $\alpha$ :

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^{k-1} a^j \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}, v_j).$$

In jedem dieser Terme besitzt  $\alpha$  zwei identische Argumente, sodass jeder einzelne Term Null ist. □

Wir definieren nun das Analogon des Symmetrisierungsoperators zur Konstruktion alternierender Tensoren.

Wir definieren die Projektion  $\text{Alt}: T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ , genannt **Alternierung** oder **Schiefsymmetrisierung**, durch:

$$\text{Alt } \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) (\sigma \alpha),$$

wobei  $S_k$  die symmetrische Gruppe auf  $k$  Elementen ist. Expliziter ausgedrückt bedeutet dies:

$$(\text{Alt } \alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Wenn beispielsweise  $\beta$  ein 2-Tensor ist, dann gilt somit

$$(\text{Alt } \beta)(v, w) = \frac{1}{2}(\beta(v, w) - \beta(w, v)).$$

Für einen 3-Tensor  $\gamma$  gilt:

$$(\text{Alt } \gamma)(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{6}(\gamma(v_1, v_2, v_3) + \gamma(v_2, v_3, v_1) + \gamma(v_3, v_1, v_2) - \gamma(v_2, v_1, v_3) - \gamma(v_1, v_3, v_2) - \gamma(v_3, v_2, v_1)).$$

Wir versuchen nun, eine explizite Basis des Raumes  $\Lambda^k(V^*)$  zu konstruieren, indem wir das Konzept der elementaren äußeren Formen einführen.

**Notation.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  wird ein geordnetes  $k$ -Tupel  $I = (i_1, \dots, i_k)$  positiver ganzer Zahlen als ein **Multiindex der Länge  $k$**  bezeichnet. Wenn  $I$  ein solcher Multiindex ist und  $\sigma \in S_k$ , schreiben wir  $I_\sigma$  für den Multiindex  $I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$ . Beachten Sie, dass  $I_{\sigma\tau} = (I_\sigma)_\tau$  für  $\sigma, \tau \in S_k$  gilt.

Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, und angenommen,  $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$  ist eine beliebige Basis für  $V^*$ . Wir definieren nun eine Familie von äußeren  $k$ -Formen auf  $V$ , welche die Determinantenfunktion auf  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Für jeden Multiindex  $I = (i_1, \dots, i_k)$  der Länge  $k$  mit  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  definieren wir einen kovarianten  $k$ -Tensor  $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1 \dots i_k}$  durch

$$\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Da die Determinante bei Vertauschung zweier Spalten ihr Vorzeichen ändert, ist klar, dass  $\varepsilon^I$  ein alternierender  $k$ -Tensor ist. Wir nennen  $\varepsilon^I$  einen **elementaren alternierenden Tensor**.

**Beispiel 14.5.** Ausgedrückt in der Standard-Dualbasis  $(e^1, e^2, e^3)$  für  $(\mathbb{R}^3)^*$  erhalten wir

$$e^{13}(v, w) = v^1 w^3 - w^1 v^3.$$

**Vorschlag 13.4** (Eigenschaften elementarer äußerer  $k$ -Formen). Es sei  $(E_i)$  eine Basis für  $V$ ,  $(\varepsilon^i)$  die zugehörige Dualbasis für  $V^*$  und  $\varepsilon^I$  wie oben definiert.

1. Wenn  $I$  einen doppelten Index enthält, dann ist  $\varepsilon^I = 0$ .
2. Wenn  $J = I_\sigma$  für ein  $\sigma \in S_k$ , dann gilt  $\varepsilon^I = (\text{sgn } \sigma)\varepsilon^J$ .
3. Das Ergebnis der Auswertung von  $\varepsilon^I$  auf einer Folge von Basisvektoren ist

$$\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_k} & \cdots & \delta_{j_k}^{i_k} \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Wenn  $I$  einen doppelten Index enthält, dann hat die Determinante in (13.3) für beliebige Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  zwei identische Zeilen und ist folglich gleich Null, was (a) beweist. Wenn andererseits  $J$  aus  $I$  durch Vertauschung zweier Indizes hervorgeht, weisen die entsprechenden Determinanten entgegengesetzte Vorzeichen auf; dies impliziert (b). Schließlich folgt (c) unmittelbar aus der Definition von  $\varepsilon^I$ .  $\square$

Wir können nun die elementaren äußeren  $k$ -Formen verwenden, um eine Basis für  $\Lambda^k(V^*)$  anzugeben. Ein Multiindex  $I = (i_1, \dots, i_k)$  heißt **aufsteigend**, wenn  $i_1 < \dots < i_k$  gilt.

**Vorschlag 13.5** (Eine Basis für  $\Lambda^k(V^*)$ ). Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum. Wenn  $(\varepsilon^i)$  eine beliebige Basis für  $V^*$  ist, dann ist für jede positive ganze Zahl  $k \leq n$  die Familie äußerer  $k$ -Formen

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon^I : I \text{ ist ein aufsteigender Multiindex der Länge } k\}$$

eine Basis für  $\Lambda^k(V^*)$ . Folglich gilt:

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Wenn  $k > n$ , dann ist  $\dim \Lambda^k(V^*) = 0$ .

*Beweis.* Dass  $\Lambda^k(V^*)$  der triviale Vektorraum ist, wenn  $k > n$ , folgt unmittelbar aus Proposition 13.3 (b), da in diesem Fall jedes  $k$ -Tupel von Vektoren linear abhängig ist. Für den Fall  $k \leq n$  müssen wir zeigen, dass die Menge  $\mathcal{E}$  den Raum  $\Lambda^k(V^*)$  aufspannt und linear unabhängig ist. Es sei  $(E_i)$  die zu  $(\varepsilon^i)$  duale Basis für  $V$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{E}$  den Raum  $\Lambda^k(V^*)$  aufspannt, sei  $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$  beliebig. Für jeden Multiindex  $I = (i_1, \dots, i_k)$  (nicht notwendigerweise aufsteigend) definieren wir eine reelle Zahl  $\alpha_I$  durch

$$\alpha_I = \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Da  $\alpha$  alternierend ist, gilt  $\alpha_I = 0$ , wenn  $I$  einen doppelten Index enthält, und  $\alpha_J = (\text{sgn } \sigma)\alpha_I$ , wenn  $J = I_\sigma$  für ein  $\sigma \in S_k$  gilt. Für jeden Multiindex  $J$  haben wir somit:

$$\sum_{I \text{--aufsteigend}} \alpha_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \alpha_J = \alpha(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}).$$

Daraus folgt  $\sum_{I \text{--aufsteigend}} \alpha_I \varepsilon^I = \alpha$ , sodass  $\mathcal{E}$  den Raum  $\Lambda^k(V^*)$  aufspannt. **Der Beweis der linearen Unabhängigkeit ist eine Übungsaufgabe.** □

## 13.2 Das Dach-Produkt

Wir betrachten nun eine Operation, die es uns ermöglicht, zwei oder mehr äußere Formen miteinander zu verknüpfen, sodass sich wieder eine äußere Form ergibt. Wir arbeiten weiterhin auf einem reellen, endlichdimensionalen Vektorraum  $V$ . Wie wir unten sehen werden, entspricht die Operation des Dach-Produkts genau der Alternierung des Tensorprodukts mit einer passend gewählten Normierungskonstante.

**Definition 13.6.** Für  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^l(V^*)$  definieren wir ihr **Dach-Produkt** (oder **äußeres Produkt**) als die folgende äußere  $(k+l)$ -Form:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta). \tag{13.4}$$

Einer der Gründe, warum wir diese Normierungskonstante in (13.4) wählen, ist die folgende Beziehung für elementare alternierende Tensoren. Man kann überprüfen, dass für beliebige Multiindizes  $I = (i_1, \dots, i_k)$  und  $J = (j_1, \dots, j_l)$  gilt:

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

wobei  $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$  durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) von  $I$  und  $J$  entsteht.

Wir betrachten nun einige wichtige Eigenschaften des Dach-Produkts.

**Vorschlag 13.7.** Angenommen,  $\omega, \omega', \eta, \eta'$  und  $\xi$  sind äußere Formen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$ .

1. **Bilinearität:** Für  $a, a' \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

2. **Assoziativität:**

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

3. **Antikommutativität:** Für  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^l(V^*)$  gilt:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega. \quad (13.5)$$

4. Wenn  $(\varepsilon^i)$  eine beliebige Basis für  $V^*$  ist und  $I = (i_1, \dots, i_k)$  ein beliebige Multiindex, dann gilt:

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I. \quad (13.6)$$

5. Für beliebige Kovektoren  $\omega^1, \dots, \omega^k$  und Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  gilt:

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^j(v_i)). \quad (13.7)$$

*Beweis.* Da das Dach-Produkt die Alternierung des Tensorprodukts ist und das Tensorprodukt eine bilineare Operation darstellt, folgt die Bilinearität des Dach-Produkts. Wir beweisen 2. und 3. für elementare alternierende Tensoren, woraus sich der allgemeine Fall ergibt. Beachten Sie, dass

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K),$$

woraus die Assoziativität des Dach-Produkts folgt. Für Teil 3. stellen wir unter Verwendung der Eigenschaft, eine äußere Form zu sein, wieder fest, dass

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^{JI} = (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^J \wedge \varepsilon^I,$$

gilt, wobei  $\sigma$  die Permutation ist, die  $IJ$  nach  $JI$  abbildet. Der wesentliche Punkt ist nun: Wenn man sowohl  $I$  als auch  $J$  als Produkt von 2-Zyklen schreibt, erfordert das Verschieben von  $J$  nach vorne und  $I$  nach hinten das Vorbeiziehen aller Indizes von  $J$ , weshalb  $\text{sgn } \tau = (-1)^{kl}$  aufgrund von  $\tau$  gilt. Dies beweist die Antikommutativität für alternierende Tensoren, und der allgemeine Fall folgt dann aus der Bilinearität.

Teil (4) ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Tatsache, dass  $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$  gilt. Teil 5. bleibt als Übungsaufgabe überlassen.  $\square$

**Notation.** Wir schreiben  $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}$ .

**Definition 13.8.** Für jeden  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  definieren wir einen Vektorraum  $\Lambda(V^*)$ , genannt die **äußere Algebra** (oder **Grassmann-Algebra**) von  $V$ , durch

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V^*).$$

Beachten Sie, dass  $\dim \Lambda(V^*) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$  gilt.

Das Dach-Produkt ist eine Operation auf  $\Lambda(V^*)$  und macht  $\Lambda(V^*)$  zu einer assoziativen, aber nicht kommutativen Algebra.

**Bemerkung 13.9.** Eine Algebra  $A$  heißt **graduier**t, wenn sie eine direkte Summenzerlegung

$$A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$$

besitzt, sodass das Produkt die Bedingung

$$(A^k)(A^l) \subseteq A^{k+l}$$

für alle  $k$  und  $l$  erfüllt. Eine graduierte Algebra ist **antikommutativ**, wenn das Produkt die Bedingung

$$ab = (-1)^{kl}ba$$

für  $a \in A^k, b \in A^l$  erfüllt. Folglich ist  $\Lambda(V^*)$  eine antikommutative graduierte Algebra.

Wir sagen, dass eine  $k$ -Form  $\omega$  **zerlegbar** (oder **dekomponierbar**) ist, wenn sie als Dach-Produkt von  $k$  1-Formen geschrieben werden kann, also  $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ , wobei die  $\omega_i$  1-Formen sind. Nicht jede  $k$ -Form ist zerlegbar, aber jede  $k$ -Form kann als Linearkombination von zerlegbaren Formen dargestellt werden.

### 13.3 Inneres Produkt

Wir diskutieren nun kurz den Begriff des inneren Produkts (auch Einsetzung oder Kontraktion genannt).

**Definition 13.10.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jedes  $v \in V$  definieren wir eine lineare Abbildung

$$i_v: \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V^*),$$

genannt **inneres Produkt mit  $v$** , durch

$$i_v \omega(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1}). \quad (13.8)$$

Das heißt,  $i_v \omega$  entsteht aus  $\omega$ , indem man  $v$  in das erste Argument einsetzt. Wir verwenden auch die Notation

$$v \lrcorner \omega = i_v \omega.$$

und lesen dies als „ $v$  hook  $\omega$ “.

Sehen wir uns einige elementare Eigenschaften des inneren Produkts an.

**Vorschlag 13.11.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum und  $v \in V$ .

1.  $i_v \circ i_v = 0$ .
2. Wenn  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  und  $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ , gilt:

$$v \lrcorner (\omega \wedge \eta) = (v \lrcorner \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (v \lrcorner \eta). \quad (13.9)$$

*Beweis.* Wenn  $\omega$  eine Funktion oder ein Kovektor ist, liefert das zweimalige Anwenden des inneren Produkts direkt 0. Für äußere Formen vom Grad  $k$  mit  $k \geq 2$  stellen wir fest, dass  $i_v \circ i_v$  bedeutet, dass wir denselben Vektor in die ersten beiden Argumente einsetzen; da  $\omega$  alternierend ist, erhalten wir Teil 1.

Wir beweisen nun Teil 2. und merken an, dass es genügt, den Fall zu betrachten, in dem sowohl  $\omega$  und  $\eta$  zerlegbar sind, da jede äußere Form als Linearkombination von zerlegbaren Formen geschrieben werden kann.

Es sei  $v_1 = v \in V$  und wählen wir ein beliebiges  $(k-1)$ -Tupel von Vektoren  $(v_2, \dots, v_k)$ . Es seien  $\omega^1, \dots, \omega^k$  1-Formen. Wir zeigen zuerst, dass

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) (\omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_2, \dots, v_k), \quad (13.10)$$

gilt, wobei das Dach anzeigt, dass  $\omega^i$  ausgelassen wird. Um zu sehen, warum (13.10) wahr ist, bemerken wir, dass die linke Seite die Determinante der Matrix  $[A]_{ij}$  ist, deren  $(i, j)$ -Eintrag  $\omega^i(v_j)$  lautet. Zur Analyse der rechten Seite bezeichne  $v_j^i$  die  $(k-1) \times (k-1)$ -Submatrix von  $[A]$ , die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht. Dann ist die rechte Seite von (13.10) gleich

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \det v_1^i.$$

Dies ist exakt die Entwicklung von  $\det[A]$  nach Laplaceschem Entwicklungssatz entlang der ersten Spalte und folglich gleich  $\det[A]$ . Somit gilt (13.10). Daraus erhalten wir schließlich:

$$v \lrcorner (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^k,$$

was Teil 2 für zerlegbare Formen und damit für alle äußeren Formen beweist. □