12.4 Pullbacks von Tensorfeldern

Genau wie Kovektorfelder können kovariante Tensorfelder durch eine glatte Abbildung zurückgezogen werden und ergeben dann Tensorfelder auf dem Definitionsbereich. Diese Konstruktion funktioniert nur für kovariante Tensorfelder; dies ist ein Grund, warum wir den größten Teil unserer Aufmerksamkeit auf den kovarianten Fall richten. Der Grund ist derselbe wie dafür, dass der Pullback eines Kovektorfeldes immer definiert ist.

Definition 12.14. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für jeden Punkt $p \in M$ und jeden k-Tensor $\alpha \in T^k(T^*_{F(p)}N)$ definieren wir einen Tensor $dF^*_p(\alpha) \in T^k(T^*_pM)$, genannt der **punktweise Pullback von** α **durch** F **in** p, durch

$$dF^*_p(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)), \qquad v_1, \ldots, v_k \in T_pM. \tag{12.4}$$

Ist A ein kovariantes k-Tensorfeld auf N, so definieren wir ein k-Tensorfeld F^*A auf M, genannt der **Pullback von** A **durch** F, durch

$$(F^*A)_p = dF^*_p(A_{F(p)}),$$

das auf Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ wirkt durch

$$(F^*A)_p(v_1, \ldots, v_k) = A_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k)). \tag{12.5}$$

Ganz genauso, wie wir die Eigenschaften über den Pullback von Vektorfeldern und Kovektorfeldern bewiesen haben, erhalten wir die folgende Proposition, die einige grundlegende Eigenschaften des Pullbacks von Tensorfeldern zusammenfasst.

Vorschlag 12.15. Seien $F\colon M \to N$ und $G\colon N \to P$ glatte Abbildungen, seien A und B kovariante Tensorfelder auf N, C Tensorfelder auf P und sei $f \in C^\infty(N)$.

(a) $F^*(fB) = (f \circ F)F^*B$.

(b) $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$.

(c) $F^*(A + B) = F^*A + F^*B$.

(d) F^*B ist ein stetiges Tensorfeld und ist glatt, falls B glatt ist.

(e) $(G \circ F)^*C = F^*(G^*C)$.

(f) $(\mathrm{Id}_N)^*B = B$.

Dies führt unmittelbar zur folgenden Folgerung, die eine Beschreibung des Pullbacks eines Tensorfeldes in lokalen Koordinaten liefert und mit Gleichung (11.10) für Kovektorfelder verglichen werden sollte.

Folge 12.16. *Sei $F\colon M \to N$ glatt, und sei B ein kovariantes k-Tensorfeld auf N. Wenn $p \in M$ und (y^i) glatte Koordinaten für N auf einer Umgebung von $F(p)$ sind, dann hat F^*B in einer Umgebung von p die folgende Darstellung:*

$$F^*\left(B_{i_1\ldots i_k}\, dy^{i_1} \otimes \cdots \otimes dy^{i_k}\right) = (B_{i_1\ldots i_k} \circ F)\, d(y^{i_1} \circ F) \otimes \cdots \otimes d(y^{i_k} \circ F). \tag{12.6}$$

Im Allgemeinen gibt es weder eine Pushforward- noch eine Pullback-Operation für gemischte Tensorfelder. Im Spezialfall eines Diffeomorphismus können Tensorfelder beliebiger Varianz jedoch vorwärts- und zurückgeschoben werden. Wir geben das Ergebnis und wichtige Eigenschaften im Folgenden nur an.

Vorschlag 12.17. *Sei $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann verallgemeinern*

$$F_* : \Gamma(T^{(k,l)}TM) \to \Gamma(T^{(k,l)}TN), \quad F^* : \Gamma(T^{(k,l)}TN) \to \Gamma(T^{(k,l)}TM),$$

die üblichen Pushforwards und Pullbacks von Vektorfeldern beziehungsweise Kovektorfeldern derart, dass

1. $F_* = (F^*)^{-1}$.
2. $F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B)$.
3. $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$ *und* $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.
4. *Für jeden kovarianten k-Tensor A auf N gilt* $F^*(A(X_1, \dots, X_k)) = F^*A(F_*^{-1}(X_1), \dots, F_*^{-1}(X_k))$.

12.5 Lie-Ableitungen von Tensorfeldern

Sobald wir wissen, was Pullbacks von Tensorfeldern sind, können wir die Idee der Lie-Ableitung von Kovektorfeldern in Richtung eines Vektorfeldes nachahmen und sie erweitern, um die Lie-Ableitung eines beliebigen Tensorfeldes in Richtung eines Vektorfeldes zu definieren.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei V ein glattes Vektorfeld auf M, und sei θ sein Fluss. Für jedes $p \in M$ ist θ_t für t hinreichend nahe bei null ein Diffeomorphismus von einer Umgebung von p auf eine Umgebung von $\theta_t(p)$, sodass $d(\theta_t)_p^*$ Tensoren in $\theta_t(p)$ durch die Formel nach p zurückzieht

$$d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})(v_1, \dots, v_k) = A_{\theta_t(p)}(d(\theta_t)_p(v_1), \dots, d(\theta_t)_p(v_k)).$$

Hierbei ist $d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})$ gerade der Wert des Pullback-Tensorfeldes $\theta_t^* A$ in p.

Definition 12.18. Für ein glattes kovariantes Tensorfeld A auf M definieren wir die **Lie-Ableitung von A bezüglich V**, bezeichnet mit $\mathcal{L}_V A$, durch

$$(\mathcal{L}_V A)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\theta_t^* A)_p = \lim_{t \to 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) - A_p}{t}, \tag{12.7}$$

sofern die Ableitung existiert. Die Größe $\mathcal{L}_V A$ ist ein glattes Tensorfeld auf M und ist ein Tensor desselben Typs wie A.

Vorschlag 12.19. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Seien $f \in C^\infty(M)$ und A, B glatte kovariante Tensorfelder auf M. Dann gilt:*

(a) $\mathcal{L}_V(fA) = (\mathcal{L}_V f)A + f\mathcal{L}_V A$.

(b) $\mathcal{L}_V(A \otimes B) = (\mathcal{L}_V A) \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$.

(c) Wenn $X_1, \dots, X_k$ glatte Vektorfelder sind und A ein glattes k-Tensorfeld ist, dann gilt

$$\mathcal{L}_V(A(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_V A)(X_1, \dots, X_k) + A(\mathcal{L}_V X_1, \dots, X_k) + \cdots + A(X_1, \dots, \mathcal{L}_V X_k). \tag{12.8}$$

(d) *Außerdem gilt*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V A)(X_1, \dots, X_k) = V(A(X_1, \dots, X_k)) - A([V, X_1], X_2, \dots, X_k) - \cdots \\ \cdots - A(X_1, \dots, X_{k-1}, [V, X_k]).\end{aligned} \tag{12.9}$$

Beweis. Übung, die auf dieselbe Weise gelöst werden kann wie die entsprechende Aussage für Vektorfelder. □

Betrachten wir ein Beispiel dafür, wie man die Lie-Ableitung eines $(0, 2)$-Tensors in lokalen Koordinaten berechnen kann.

Beispiel 12.20. Sei A ein beliebiges glattes kovariantes 2-Tensorfeld, und sei V ein glattes Vektorfeld. Wir berechnen die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_V A$ in glatten lokalen Koordinaten (x^i). Zunächst beobachten wir, dass $\mathcal{L}_V dx^i = d(\mathcal{L}_V x^i) =$

$d(Vx^i) = dV^i$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V A &= \mathcal{L}_V(A_{ij} dx^i \otimes dx^j) \\
&= \mathcal{L}_V(A_{ij}) dx^i \otimes dx^j + A_{ij}(\mathcal{L}_V dx^i) \otimes dx^j + A_{ij} dx^i \otimes (\mathcal{L}_V dx^j) \\
&= V A_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + A_{ij}\, dV^i \otimes dx^j + A_{ij}\, dx^i \otimes dV^j \\
&= \left(V A_{ij} + A_{kj} \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + A_{ik} \frac{\partial V^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j.
\end{aligned}$$

Sobald wir also die Darstellung des Vektorfeldes V in lokalen Koordinaten und die Darstellung des Tensors A in lokalen Koordinaten kennen, können wir die Darstellung von $\mathcal{L}_V A$ in lokalen Koordinaten explizit in Termen der Ableitungen der Komponentenfunktionen von V und A angeben. Ähnliche Formeln gelten für Tensoren höheren Ranges.

Erinnern wir uns daran, dass die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes W bezüglich V genau dann null ist, wenn W unter dem Fluss von V invariant ist; dies war der Inhalt von Proposition 10.7. Für Tensoren können wir eine ähnliche Aussage treffen. Ist A ein glattes Tensorfeld auf M und θ ein Fluss auf M, so sagen wir, dass A **unter θ invariant ist**, wenn für jedes t die Abbildung θ_t das Tensorfeld A überall dort, wo sie definiert ist, auf sich selbst zurückzieht, das heißt

$$d(\theta_t)^*_p(A_{\theta_t(p)}) = A_p \tag{12.11}$$

für alle (t, p) im Definitionsbereich von θ. Wenn θ ein globaler Fluss ist, ist dies äquivalent zu $\theta_t^* A = A$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Das folgende Ergebnis ist ein Analogon von Proposition 10.5, die zeigt, wie die Lie-Ableitung verwendet werden kann, um Zeitableitungen zu Zeiten ungleich $t = 0$ zu berechnen.

Vorschlag 12.21. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Sei θ der Fluss von V. Für jedes glatte kovariante Tensorfeld A und jedes (t_0, p) im Definitionsbereich von θ gilt*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\theta_t^* A)_p = (\theta_{t_0}^*(\mathcal{L}_V A))_p. \tag{12.10}$$

Beweis. Verwenden wir die Definition des Pullbacks von Tensoren, so sehen wir, dass (12.10) äquivalent dazu ist zu beweisen, dass

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} d(\theta_t)^*_p(A_{\theta_t(p)}) = d(\theta_{t_0})^*_p((\mathcal{L}_V A)_{\theta_{t_0}(p)}).$$

Wir ahmen den Beweis von Proposition 10.5 nach und führen die Variablentransformation $t = s + t_0$ durch, um zu erhalten

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} d(\theta_t)^*_p(A_{\theta_t(p)}) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} d(\theta_{s+t_0})^*_p(A_{\theta_{s+t_0}(p)}) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} d(\theta_{t_0})^*_p d(\theta_s)^*_{\theta_{t_0}(p)}(A_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \\
&= d(\theta_{t_0})^*_p \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} d(\theta_s)^*_{\theta_{t_0}(p)}(A_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \\
&= d(\theta_{t_0})^*_p((\mathcal{L}_V A)_{\theta_{t_0}(p)}).
\end{aligned}$$

□

Somit erhalten wir unmittelbar das Analogon von Proposition 10.7 für Tensoren.

Satz 12.22. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $V \in \mathfrak{X}(M)$. Ein glattes kovariantes Tensorfeld A ist genau dann invariant unter dem Fluss von V, wenn $\mathcal{L}_V A = 0$.* □

13. Differentialformen

Im vorherigen Kapitel haben wir gelernt, was Tensoren sind. Unter allen Tensoren gibt es spezielle Arten von Tensoren, die als symmetrische und schiefsymmetrische Tensoren bezeichnet werden. In diesem Kapitel werden wir uns mit Letzteren beschäftigen. Zuerst definieren wir jedoch sowohl symmetrische als auch schiefsymmetrische Tensoren.

Definition 13.1. Ein kovarianter Tensor α vom Rang k auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V heißt **symmetrisch**, wenn

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) \tag{13.1}$$

für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt.

Tatsächlich impliziert (13.1), dass der Wert von α unverändert bleibt, wenn die Vektoren $v_1, ..., v_k$ in einer beliebigen Reihenfolge umgeordnet werden. Ausgedrückt in den Komponentenfunktionen bedeutet dies, dass $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ durch jede Permutation der Indizes unverändert bleibt.

Die Menge der symmetrischen kovarianten k-Tensoren $\Sigma^k(V^*)$ ist ein linearer Unterraum des Raumes $T^k(V^*)$ aller kovarianten k-Tensoren auf V. Aus jedem beliebigen Tensor α können wir wie folgt einen symmetrischen Tensor machen. Es bezeichne S_k die symmetrische Gruppe auf k Elementen. Für einen gegebenen k-Tensor α und eine Permutation $\sigma \in S_k$ definieren wir einen neuen k-Tensor ${}^\sigma\alpha$ durch

$${}^\sigma\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Beachten Sie, dass ${}^\tau({}^\sigma\alpha) = {}^{\tau\sigma}\alpha$ gilt, wobei $\tau\sigma$ die Verknüpfung von τ und σ darstellt, das heißt $\tau\sigma(i) = \tau(\sigma(i))$.

Wir definieren eine Projektion $\operatorname{Sym}\colon T^k(V^*) \to \Sigma^k(V^*)$, genannt **Symmetrisierung**, durch

$$\operatorname{Sym}\alpha = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} {}^\sigma\alpha = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Offensichtlich ist $\operatorname{Sym}\alpha$ ein symmetrischer Tensor.

Wenn α und β symmetrische Tensoren auf V sind, dann ist $\alpha \otimes \beta$ im Allgemeinen nicht symmetrisch. Betrachten wir beispielsweise α und β als Kovektoren. Einzeln betrachtet sind beide symmetrisch, aber es gilt

$$\alpha \otimes \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) \neq \alpha \otimes \beta(v_2, v_1).$$

Wir können jedoch die Symmetrisierung von $\alpha \otimes \beta$ wie oben definieren. Wenn $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$ und $\beta \in \Sigma^l(V^*)$ sind, definieren wir ihr ***symmetrisches Produkt*** als den $(k+l)$-Tensor $\alpha\beta$ durch

$$\alpha\beta = \operatorname{Sym}(\alpha \otimes \beta),$$

dessen Wirkung auf Vektoren $v_1, \dots, v_{k+l}$ gegeben ist durch

$$\alpha\beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Wenn beispielsweise α und β Kovektoren sind, gilt folglich

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

Dieselbe Analyse auf jedem Tangentialraum liefert den Begriff der symmetrischen Tensoren auf Mannigfaltigkeiten. Ein Beispiel dafür haben wir bereits zuvor gesehen: die Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit. Wir werden später mehr darüber erfahren.

13.1 Alternierende Tensoren

Lassen Sie uns zuerst verschiedene Begriffe im Zusammenhang mit alternierenden Tensoren auf einem Vektorraum besprechen. Anschließend werden wir dieses gesamte Wissen einfach auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir haben die folgende Definition.

Definition 13.2. Ein kovarianter k-Tensor α auf V heißt **alternierend** oder **schiefsymmetrisch**, wenn er sein Vorzeichen wechselt, wann immer zwei seiner Argumente miteinander vertauscht werden. Das heißt, für alle Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ und jedes Paar verschiedener Indizes i, j gilt

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k). \tag{13.2}$$

Alternierende kovariante k-Tensoren werden auch als **äußere Formen** bezeichnet.

Sowie zur Erinnerung: Für jede Permutation $\sigma \in S_k$ ist das **Vorzeichen** (oder das **Signum**) von σ, bezeichnet mit $\operatorname{sgn} \sigma$, gleich $+1$, wenn σ gerade ist, und -1, wenn σ ungerade ist. Folglich impliziert (13.2), dass für einen alternierenden Tensor α, beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ und jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt:

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k),$$

und die Komponenten $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ von α wechseln das Vorzeichen, wann immer zwei Indizes miteinander vertauscht werden.

Notation. Der Vektorraum aller alternierenden k-Tensoren auf V wird mit $\Lambda^k(V^*)$ bezeichnet. Offensichtlich sind alle 0-Tensoren und 1-Tensoren alternierend.

Vorschlag 13.3. Es sei α ein kovarianter k-Tensor auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) α *ist alternierend.*

(b) $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$, *wann immer das k-Tupel* $(v_1, \ldots, v_k)$ *linear abhängig ist.*

(c) α *liefert den Wert Null, wann immer zwei seiner Argumente gleich sind:*

$$\alpha(v_1, \ldots, w, \ldots, w, \ldots, v_k) = 0.$$

Beweis. Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (c) und (b) $\Rightarrow$ (c) sind unmittelbar ersichtlich. Wir vervollständigen den Beweis, indem wir zeigen, dass (c) sowohl (a) als auch (b) impliziert.

Nehmen wir an, dass α die Bedingung (c) erfüllt. Für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ impliziert die Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\ &\quad + \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\ &= \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

Folglich ist α alternierend. Wenn andererseits $(v_1, \ldots, v_k)$ ein linear abhängiges k-Tupel ist, dann lässt sich einer der Vektoren v_i als Linearkombination der anderen schreiben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass

$$v_k = \sum_{j=1}^{k-1} a^j v_j$$

gilt. Dann impliziert die Multilinearität von α:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j=1}^{k-1} a^j \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_j).$$

In jedem dieser Terme besitzt α zwei identische Argumente, sodass jeder einzelne Term Null ist. □