

Zum Beispiel ist ein **Kovektor** ein kovarianter Tensor vom Rang 1. Ein Skalarprodukt ist ein kovarianter Tensor vom Rang 2.

Definition 12.4. Für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum V definieren wir den Raum der *kontravarianten Tensoren auf V vom Rang k* als den Vektorraum

$$T^k(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ Kopien}}.$$

Elemente von $T^k(V)$ kann man auch auffassen als

$$T^k(V) \cong \left\{ \text{multilineare Funktionen } \alpha: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ Kopien}} \rightarrow \mathbb{R} \right\}.$$

Durch Kombination der beiden vorherigen Definitionen erhalten wir Folgendes:

Definition 12.5. Für beliebige nichtnegative ganze Zahlen k, l definieren wir den Raum der *gemischten Tensoren auf V vom Typ (k, l)* als

$$T^{(k,l)}(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ Kopien}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ Kopien}}.$$

Somit gilt in unserer Notation zum Beispiel

$$T^{(0,0)}(V) = T^0(V^*) = T^0(V) = \mathbb{R},$$

$$T^{(0,1)}(V) = T^1(V^*) = V^*,$$

$$T^{(1,0)}(V) = T^1(V) = V,$$

$$T^{(0,k)}(V) = T^k(V^*),$$

$$T^{(k,0)}(V) = T^k(V).$$

Bemerkung 12.6. Die Notation $T^{(k,l)}(V)$ ist nicht universell. Eine andere gebräuchliche Notation ist $T_l^k(V)$. In einer weiteren Notation werden die Rollen von k und l vertauscht; daher muss man beim Lesen anderer Quellen vorsichtig sein.

Eine Folgerung aus Proposition 12.2 ist die folgende Aussage über Basen des Raumes der Tensoren.

Folge 12.7. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis (E_i) und sei (ε^j) die duale Basis von V^* . Dann bilden die folgenden Mengen Basen der Tensorräume über V :

$$\{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\} \quad \text{für } T^k(V^*);$$

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\} \quad \text{für } T^k(V);$$

$$\{E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_k} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_l} : 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n\} \quad \text{für } T^{(k,l)}(V).$$

Daher gilt

$$\dim T^k(V^*) = \dim T^k(V) = n^k \quad \text{und} \quad \dim T^{(k,l)}(V) = n^{k+l}.$$

Somit können wir bei gegebener Basis von V und der zugehörigen dualen Basis die Darstellung jedes Elements $A \in T^k(V^*)$ explizit angeben. Es gilt

$$A = A_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k},$$

wobei die n^k Koeffizienten $A_{i_1 \dots i_k}$ bestimmt sind durch

$$A_{i_1 \dots i_k} = A(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

12.3 Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir ahmen unsere Beschreibungen des Tangentialbündels und des Kotangentialbündels nach, um zunächst das **Bündel der kovarianten k -Tensoren auf M** zu definieren durch

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^* M).$$

Analog definieren wir das **Bündel der kontravarianten k -Tensoren** durch

$$T^k T M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M),$$

und das **Bündel der gemischten Tensoren vom Typ (k, l)** durch

$$T^{(k,l)} T M = \coprod_{p \in M} T^{(k,l)}(T_p M).$$

Unmittelbar sehen wir beispielsweise, dass

$$T^{(0,0)} T M = T^0 T^* M = T^0 T M = M \times \mathbb{R},$$

$$T^{(0,1)} T M = T^1 T^* M = T^* M,$$

$$T^{(1,0)} T M = T^1 T M = T M,$$

$$T^{(0,k)} T M = T^k T^* M,$$

$$T^{(k,0)} T M = T^k T M.$$

Wie im Fall des Tangential- und Kotangentialbündels kann man zeigen, dass die obigen Räume, auch **Tensorbündel über M** genannt, glatte Mannigfaltigkeiten mit einer von M geerbten glatten Struktur sind und außerdem mit einer Projektionsabbildung $\pi : T^{(k,l)}(M) \rightarrow M$ ausgestattet sind. Daher können wir auch die Beschreibung von Vektorfeldern und Kovektorfeldern nachahmen, um die folgende Definition zu geben.

Definition 12.8. Ein (k, l) -Tensorfeld α auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine stetige Abbildung

$$\alpha : M \rightarrow T^{(k,l)}(M)$$

derart, dass

$$\pi \circ \alpha = id_M.$$

Das Tensorfeld α heißt **glatt**, wenn es eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist.

Wir sehen, dass kontravariante 1-Tensorfelder dasselbe sind wie Vektorfelder, und kovariante 1-Tensorfelder Kovektorfelder sind; ein 0-Tensorfeld ist dasselbe wie eine stetige reellwertige Funktion.

Notation: Wir bezeichnen den Raum aller (k, l) -Tensorfelder mit $\Gamma(T^{(k,l)} T M)$. Dies sind unendlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{R} und Moduln über $C^\infty(M)$. In beliebigen glatten lokalen Koordinaten (x^i) können Schnitte dieser Bündel unter Verwendung der Summenkonvention geschrieben werden als

$$A = \begin{cases} A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & A \in \Gamma(T^k T^* M); \\ A^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, & A \in \Gamma(T^k T M); \\ A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & A \in \Gamma(T^{(k,l)} T M). \end{cases}$$

Die Funktionen $A_{i_1 \dots i_k}$, $A^{i_1 \dots i_k}$ oder $A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ heißen die **Komponentenfunktionen von A** in den gewählten Koordinaten. Der Kürze halber bezeichnen wir den Raum aller glatten kovarianten k -Tensorfelder mit

$$\mathcal{T}^k(M) = \Gamma(T^k T^* M).$$

Die nächste Proposition ist analog zu Proposition 8.8, welche die Glattheitskriterien für Vektorfelder angab, beziehungsweise zu Proposition 11.5 für Kovektorfelder. Wir formulieren sie nur für kovariante Tensoren, aber das Ergebnis ist für andere Typen von Tensoren ähnlich.

Vorschlag 12.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $A: M \rightarrow T^k T^* M$ ein Tensorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (1) A ist glatt.
- (2) In jeder glatten Koordinatenkarte sind die Komponentenfunktionen von A glatt.
- (3) Wenn $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist die Funktion $A(X_1, \dots, X_k): M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$A(X_1, \dots, X_k)(p) = A_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p),$$

glatt.

- (4) Wann immer X_1, \dots, X_k glatte Vektorfelder sind, die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert sind, ist die Funktion $A(X_1, \dots, X_k)$ glatt auf U .

Damit haben wir die Glattheit eines Tensorfeldes wiederum darauf zurückgeführt, entweder seine Komponentenfunktionen zu betrachten oder aus A eine Funktion zu erzeugen, indem man k Vektorfelder in A einsetzt und anschließend die Glattheit der entstehenden Funktion untersucht. Ähnlich wie im Fall von Vektorfeldern gilt das Folgende:

Vorschlag 12.10. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \in \mathcal{T}^k(M)$, $B \in \mathcal{T}^l(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann sind fA und $A \otimes B$ ebenfalls glatte Tensorfelder, deren Komponenten in jeder glatten lokalen Koordinatenkarte gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (fA)_{i_1 \dots i_k} &= f A_{i_1 \dots i_k}, \\ (A \otimes B)_{i_1 \dots i_{k+l}} &= A_{i_1 \dots i_k} B_{i_{k+1} \dots i_{k+l}}. \end{aligned}$$

Nun stellt sich eine Frage: Wenn wir eine Abbildung sehen, die k Vektorfelder als Argumente nimmt und uns eine glatte Funktion liefert, wie können wir garantieren, dass sie tatsächlich ein glattes kovariantes Tensorfeld vom Rang k ist? Zunächst bemerken wir, dass jeder kovariante Tensor A vom Rang k eine Abbildung

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ Kopien}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

induziert, die multilinear über \mathbb{R} ist. Tatsächlich gilt aber mehr: Sie ist *multilinear über* $C^\infty(M)$. Das bedeutet, dass für $f, f' \in C^\infty(M)$ und $X_i, X'_i \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$A(X_1, \dots, fX_i + f'X'_i, \dots, X_k) = fA(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + f'A(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_k).$$

Diese Eigenschaft erweist sich als charakteristisch für glatte Tensorfelder, wie das nächste Lemma zeigt, das wir ohne Beweis angeben.

Lemma 12.11 (Charakterisierungslemma für Tensoren). Eine Abbildung

$$A: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ Kopien}} \longrightarrow C^\infty(M), \tag{12.3}$$

wird genau dann von einem glatten kovarianten k -Tensorfeld wie oben induziert, wenn sie multilinear über $C^\infty(M)$ ist.

Ein **symmetrisches Tensorfeld** auf einer Mannigfaltigkeit ist ein kovariantes Tensorfeld, dessen Wert an jedem Punkt ein symmetrischer Tensor ist, d.h. der Wert des Tensors ändert sich nicht, wenn wir die Position der Vektoren in seinem Argument vertauschen. Das symmetrische Produkt von zwei oder mehr Tensorfeldern wird punktweise definiert, genau wie das Tensorprodukt. Wenn zum Beispiel A und B glatte Kovektorfelder sind, dann ist ihr symmetrisches Produkt das glatte 2-Tensorfeld AB , das gegeben ist durch

$$AB = \frac{1}{2}(A \otimes B + B \otimes A).$$

Wir erwähnen noch zwei weitere Beispiele von Tensoren.

Beispiel 12.12 (Riemannsche Metriken). Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik g auf M ordnet jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt g_p auf $T_p M$ zu, und somit erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

die außerdem symmetrisch und positiv definit ist. Eine Riemannsche Metrik heißt *glatt*, wenn die Funktion $M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto g(X(p), Y(p))$ für jedes Paar von Vektorfeldern $X, Y \in \Xi(M)$ glatt ist. Somit ist g ein Beispiel eines symmetrischen $(0, 2)$ -Tensors.

Beispiel 12.13 (Fast komplexe Struktur). Sei V ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum. Wir können ihn zu einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum machen, wenn wir eine Abbildung $J : V \rightarrow V$ haben mit $J^2 = -id$ und dann definieren durch $(a + ib)v = av + bJv$. Ein solches J heißt eine **komplexe Struktur** auf V .

Eine **fast komplexe Struktur** auf M ist eine Abbildung $J : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ derart, dass sie für alle $p \in M$ eine komplexe Struktur auf $T_p M$ induziert. Somit ist eine fast komplexe Struktur ein Beispiel eines $(1, 1)$ -Tensorfeldes.