

## 11.4 Rückzug von Kovektorfeldern

Wie wir gesehen haben, liefert eine glatte Abbildung eine lineare Abbildung auf Tangentialvektoren, das sogenannte Differential. Durch Dualisierung ergibt sich eine lineare Abbildung auf Kovektoren in der entgegengesetzten Richtung.

Sei  $F: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und sei  $p \in M$  beliebig. Das Differential  $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  liefert eine duale lineare Abbildung

$$dF_p^*: T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M,$$

die (**punktweiser**) Rückzug durch  $F$  in  $p$  oder **Kotangentialabbildung von  $F$**  genannt wird. Entfaltet man die Definitionen, so sieht man, dass  $dF_p^*$  charakterisiert ist durch

$$dF_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_p(v)), \quad \text{für } \omega \in T_{F(p)}^* N, v \in T_p M.$$

Nun kommt der wichtige Teil. Wir erinnern daran, dass wir bei der Diskussion von Vektorfeldern betont haben, dass Vorwärtstransporte von Vektorfeldern unter glatten Abbildungen nur in den Spezialfällen von Diffeomorphismen oder Lie-Gruppen-Homomorphismen definiert sind (man erinnere sich an den Begriff der  $F$ -Verwandtschaft). **Das Überraschende an Kovektoren ist, dass sich Kovektorfelder immer zurückziehen lassen.**

**Definition 11.11.** Gegeben eine glatte Abbildung  $F: M \rightarrow N$  und ein Kovektorfeld  $\omega$  auf  $N$ , definieren wir ein Kovektorfeld  $F^*\omega$  auf  $M$ , den sogenannten **Rückzug von  $\omega$  durch  $F$** , durch

$$(F^*\omega)_p = dF_p^*(\omega_{F(p)}). \quad (11.7)$$

Die Wirkung auf einen Vektor  $v \in T_p M$  ist gegeben durch

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}(dF_p(v)).$$

Im Gegensatz zum Fall der Vektorfelder gibt es hier keine Mehrdeutigkeit bezüglich des Punktes, von dem zurückgezogen wird: Der Wert von  $F^*\omega$  in  $p$  ist der Rückzug von  $\omega$  in  $F(p)$ .

Wir beweisen nun zwei wichtige Eigenschaften des Rückzugs.

**Vorschlag 11.12.** Sei  $F: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Sei  $u$  eine stetige reellwertige Funktion auf  $N$  und  $\omega$  ein Kovektorfeld auf  $N$ . Dann gilt

$$F^*(u\omega) = (u \circ F)F^*\omega. \quad (11.8)$$

Ist  $u$  zusätzlich glatt, so gilt

$$F^*du = d(u \circ F). \quad (11.9)$$

*Proof.* Zum Beweis von (11.8) berechnen wir

$$\begin{aligned} (F^*(u\omega))_p &= dF_p^*((u\omega)_{F(p)}) \\ &= dF_p^*(u(F(p))\omega_{F(p)}) \\ &= u(F(p))dF_p^*(\omega_{F(p)}) && \text{(nach Linearität von } dF_p^*) \\ &= u(F(p))(F^*\omega)_p && \text{(nach Definition)} \\ &= ((u \circ F)F^*\omega)_p. \end{aligned}$$

Für (11.9) sei  $v \in T_p M$  beliebig, und wir berechnen

$$\begin{aligned} (F^*du)_p(v) &= (dF_p^*(du_{F(p)}))(v) && \text{(nach (11.7))} \\ &= du_{F(p)}(dF_p(v)) && \text{(nach Definition von } dF_p^*) \\ &= dF_p(v)u && \text{(nach Definition von } du) \\ &= v(u \circ F) && \text{(nach Definition von } dF_p) \\ &= d(u \circ F)_p(v) && \text{(nach Definition von } d(u \circ F)). \end{aligned}$$

□

**Vorschlag 11.13.** Sei  $F: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und sei  $\omega$  ein Kovektorfeld auf  $N$ . Dann ist  $F^*\omega$  ein Kovektorfeld auf  $M$ . Ist  $\omega$  glatt, so ist auch  $F^*\omega$  glatt.

*Proof.* Sei  $p \in M$  beliebig, und wähle glatte Koordinaten  $(y^j)$  für  $N$  in einer Umgebung  $V$  von  $F(p)$ . Sei  $U = F^{-1}(V)$ , was eine Umgebung von  $p$  ist. Schreiben wir  $\omega$  in Koordinaten als  $\omega = \omega_j dy^j$  für stetige Funktionen  $\omega_j$  auf  $V$  und verwenden Satz 11.12 zweimal, so ergibt sich die folgende Berechnung in  $U$ :

$$F^*\omega = F^*(\omega_j dy^j) = (\omega_j \circ F)F^* dy^j = (\omega_j \circ F)d(y^j \circ F). \quad (11.10)$$

Dieser Ausdruck ist stetig und glatt, falls  $\omega$  glatt ist. □

**Beispiel 11.14.** Sei  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Abbildung, gegeben durch

$$(u, v) = F(x, y, z) = (x^2y, y \sin z),$$

und sei  $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)$  das Kovektorfeld

$$\omega = u dv + v du.$$

Gemäß (11.10) ist der Rückzug  $F^*\omega$  gegeben durch

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (u \circ F)d(v \circ F) + (v \circ F)d(u \circ F) \\ &= (x^2y) d(y \sin z) + (y \sin z)d(x^2y) \\ &= x^2y(\sin z dy + y \cos z dz) + y \sin z (2xy dx + x^2 dy) \\ &= 2xy^2 \sin z dx + 2x^2y \sin z dy + x^2y^2 \cos z dz. \end{aligned}$$

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $S \subseteq M$  eine immersierte Untermannigfaltigkeit und  $\iota: S \hookrightarrow M$  die Inklusionsabbildung. Ist  $\omega$  ein beliebiges glattes Kovektorfeld auf  $M$ , so liefert der Rückzug durch  $\iota$  ein glattes Kovektorfeld  $\iota^*\omega$  auf  $S$ . Um zu sehen, was dies bedeutet, sei  $v \in T_pS$  beliebig, und wir berechnen

$$(\iota^*\omega)_p(v) = \omega_p(d\iota_p(v)) = \omega_p(v),$$

da  $d\iota_p: T_pS \rightarrow T_pM$  unter unserer üblichen Identifikation von  $T_pS$  mit einem Unterraum von  $T_pM$  lediglich die Inklusionsabbildung ist. Somit ist  $\iota^*\omega$  einfach die Einschränkung von  $\omega$  auf Vektoren, die tangential an  $S$  sind. Aus diesem Grund wird  $\iota^*\omega$  oft die **Einschränkung von  $\omega$  auf  $S$**  genannt.

## 11.5 Lie-Ableitungen von 1-Formen

Die Lie-Ableitung lässt sich auf Kovektorfelder erweitern. Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $V$  ein glattes Vektorfeld auf  $M$  und  $\theta$  sein Fluss. Für jedes  $p \in M$  ist  $\theta_t$  für hinreichend kleines  $t$  ein Diffeomorphismus von einer Umgebung von  $p$  auf eine Umgebung von  $\theta_t(p)$ , sodass  $d(\theta_t)_p$  Kovektoren in  $\theta_t(p)$  auf solche in  $p$  zurückzieht, gemäß der Formel

$$d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)})(v) = \omega_{\theta_t(p)}(d(\theta_t)_p(v)).$$

Man beachte, dass  $d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)})$  gerade der Wert des zurückgezogenen Kovektorfeldes  $\theta_t^*\omega$  in  $p$  ist.

**Definition 11.15.** Gegeben ein glattes Kovektorfeld  $\omega$  auf  $M$ , definieren wir die **Lie-Ableitung von  $\omega$  bezüglich  $V$** , bezeichnet mit  $\mathcal{L}_V\omega$ , durch

$$(\mathcal{L}_V\omega)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^*\omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p}{t}, \quad (11.11)$$

sofern die Ableitung existiert.

Wie im Fall der Vektorfelder gilt:

**Vorschlag 11.16.** Mit  $M, V$  und  $\omega$  wie oben existiert die Ableitung in (11.11) für jedes  $p \in M$  und definiert  $\mathcal{L}_V\omega$  als ein glattes Kovektorfeld auf  $M$ .

**Lemma 11.17.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und sei  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . Sei  $f$  eine glatte reellwertige Funktion auf  $M$  und  $\omega$  ein glattes Kovektorfeld auf  $M$ . Dann gilt:

(a)  $\mathcal{L}_V(f\omega) = (\mathcal{L}_V f)\omega + f\mathcal{L}_V\omega.$

(b) Ist  $X$  ein glattes Vektorfeld, so gilt

$$\mathcal{L}_V(\omega(X)) = (\mathcal{L}_V\omega)(X) + \omega(\mathcal{L}_V X) \quad (11.12)$$

Eine Folgerung aus diesem Satz ist die folgende Formel, die die Lie-Ableitung eines beliebigen glatten Kovektorfeldes durch Lie-Klammern und gewöhnliche Richtungsableitungen von Funktionen ausdrückt, was es uns erlaubt, Lie-Ableitungen zu berechnen, ohne zuvor den Fluss zu bestimmen.

**Folge 11.18.** Es gilt Folgendes.

1. Ist  $V$  ein glattes Vektorfeld und  $\omega$  ein glattes Kovektorfeld, so gilt für jedes glatte Vektorfeld  $X$

$$(\mathcal{L}_V\omega)(X) = V(\omega(X)) - \omega([V, X]). \quad (11.13)$$

2. Ist  $f \in C^\infty(M)$ , so gilt  $\mathcal{L}_V(df) = d(\mathcal{L}_V f).$

*Beweis.* Wir beweisen nur (2). Mit (11.13) berechnen wir für beliebiges  $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V df)(X) &= V(df(X)) - df([V, X]) = VXf - [V, X]f \\ &= VXf - (VXf - XVf) = XVf \\ &= d(Vf)(X) = d(\mathcal{L}_V f)(X). \end{aligned}$$

□

## 12. Tensoren

Nachdem wir den Begriff der Vektorfelder und Kovektorfelder ausführlich untersucht und die Techniken zu ihrer Untersuchung verstanden haben, beginnen wir nun mit dem Studium von Tensoren, die eine einheitliche Möglichkeit bieten, Tangential- und Kotangentialbündel gemeinsam zu behandeln. Wir beginnen mit Tensoren auf einem Vektorraum; diese sind multilineare Verallgemeinerungen von Kovektoren. Ein Kovektor ist der Spezialfall eines Tensors vom Rang eins.

Viele geometrische Strukturen, die uns im Studium der Differentialgeometrie begegnen werden, sind Tensoren: zum Beispiel Riemannsche Metriken, fast komplexe Strukturen, symplektische Strukturen, Differentialformen usw.

### 12.1 Multilineare Algebra

Wir erinnern daran, dass Kovektoren reellwertige lineare Funktionen auf einem Vektorraum sind. Ein Tensor ist eine Verallgemeinerung davon in dem Sinne, dass Tensoren reellwertige *multilineare* Funktionen in einer oder mehreren Variablen sind.

Seien  $V_1, \dots, V_k$  und  $W$  Vektorräume. Eine Abbildung

$$F: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

heißt *multilinear*, wenn sie in jeder Variablen linear ist, d.h. für jedes  $i$  gilt

$$F(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_k) = aF(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + bF(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

Auf diese Weise ist eine multilineare Funktion in einer Variablen einfach eine lineare Funktion, und eine multilineare Funktion in zwei Variablen wird im Allgemeinen *bilinear* genannt. Wir schreiben  $L(V_1, \dots, V_k; W)$  für die Menge aller multilinearen Abbildungen von  $V_1 \times \dots \times V_k$  nach  $W$ . Sie ist ein Vektorraum bezüglich der üblichen Operationen der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation:

$$(F + F')(v_1, \dots, v_k) = F(v_1, \dots, v_k) + F'(v_1, \dots, v_k),$$

$$(aF)(v_1, \dots, v_k) = a(F(v_1, \dots, v_k)).$$

Zum Beispiel sind das Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ , das Kreuzprodukt in  $\mathbb{R}^3$  und die Determinante alles Beispiele für multilineare Abbildungen. Betrachten wir nun ein anderes, aber sehr wichtiges Beispiel.

**Beispiel 12.1** (Tensorprodukt von Kovektoren). Sei  $V$  ein Vektorraum, und seien  $\omega, \eta \in V^*$ . Definiere eine Funktion  $\omega \otimes \eta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\omega \otimes \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2),$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite die gewöhnliche Multiplikation reeller Zahlen ist. Die Linearität von  $\omega$  und  $\eta$  garantiert, dass  $\omega \otimes \eta$  eine bilineare Funktion in  $v_1$  und  $v_2$  ist. Wenn  $(e^1, e^2)$  die Standard-Dualbasis von  $(\mathbb{R}^2)^*$  bezeichnet, dann ist  $e^1 \otimes e^2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die bilineare Funktion

$$e^1 \otimes e^2((w, x), (y, z)) = wz.$$

Wir können das letzte Beispiel auf beliebige reellwertige multilineare Funktionen wie folgt verallgemeinern: Seien  $V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l$  reelle Vektorräume, und seien  $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  und  $G \in L(W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$ . Definiere eine Funktion

$$F \otimes G: V_1 \times \dots \times V_k \times W_1 \times \dots \times W_l \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = F(v_1, \dots, v_k)G(w_1, \dots, w_l). \quad (12.1)$$

Aus der Multilinearität von  $F$  und  $G$  folgt, dass  $F \otimes G(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$  von jedem Argument  $v_i$  bzw.  $w_j$  separat linear abhängt. Daher ist  $F \otimes G$  ein Element von  $L(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l; \mathbb{R})$  und heißt das **Tensorprodukt von  $F$  und  $G$** . Man kann zeigen, dass

$$(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H).$$

Daher können wir Tensorprodukte von drei oder mehr multilinearen Funktionen ohne Mehrdeutigkeit ohne Klammern schreiben. Wenn  $F_1, \dots, F_l$  multilineare Funktionen sind, die jeweils von  $k_1, \dots, k_l$  Variablen abhängen, dann ist ihr Tensorprodukt  $F_1 \otimes \dots \otimes F_l$  eine multilineare Funktion in  $k = k_1 + \dots + k_l$  Variablen, deren Wirkung auf  $k$  Vektoren dadurch gegeben ist, dass die ersten  $k_1$  Vektoren in  $F_1$ , die nächsten  $k_2$  Vektoren in  $F_2$  usw. eingesetzt werden und die Ergebnisse miteinander multipliziert werden.

Wenn  $\omega^j \in V_j^*$  für  $j = 1, \dots, k$ , dann ist  $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  die multilineare Funktion, die gegeben ist durch

$$\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \omega^1(v_1) \dots \omega^k(v_k). \tag{12.1}$$

Die nächste Proposition zeigt, dass man eine Basis für jeden Raum multilinearer Funktionen bilden kann, indem man alle möglichen Tensorprodukte von Basis-Kovektoren nimmt.

**Vorschlag 12.2** (Eine Basis für den Raum multilinearer Funktionen). Seien  $V_1, \dots, V_k$  reelle Vektorräume der Dimensionen  $n_1, \dots, n_k$ . Für jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$  sei  $(E_1^{(j)}, \dots, E_{n_j}^{(j)})$  eine Basis von  $V_j$ , und sei  $(\varepsilon_{(j)}^1, \dots, \varepsilon_{(j)}^{n_j})$  die entsprechende duale Basis von  $V_j^*$ . Dann ist die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k \right\}$$

eine Basis von  $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ , der daher Dimension  $n_1 \dots n_k$  hat.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass  $\mathcal{B}$  linear unabhängig ist und  $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  aufspannt. Sei  $F \in L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  beliebig. Für jedes geordnete  $k$ -Tupel  $(i_1, \dots, i_k)$  von ganzen Zahlen mit  $1 \leq i_j \leq n_j$  definieren wir eine Zahl  $F_{i_1 \dots i_k}$  durch

$$F_{i_1 \dots i_k} = F \left( E_{i_1}^{(1)}, \dots, E_{i_k}^{(k)} \right). \tag{12.2}$$

Wenn wir zeigen, dass

$$F = F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}$$

gilt, dann folgt daraus, dass  $\mathcal{B}$  den Raum  $L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$  aufspannt. Für ein beliebiges  $k$ -Tupel von Vektoren  $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$  schreiben wir  $v_1 = v_1^{i_1} E_{i_1}^{(1)}, \dots, v_k = v_k^{i_k} E_{i_k}^{(k)}$  und berechnen

$$\begin{aligned} F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k}(v_1, \dots, v_k) &= F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1}(v_1) \dots \varepsilon_{(k)}^{i_k}(v_k) \\ &= F_{i_1 \dots i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k}, \end{aligned}$$

während  $F(v_1, \dots, v_k)$  aufgrund der Multilinearität gleich demselben Ausdruck ist. Dies beweist die Behauptung.

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{B}$  linear unabhängig ist, nehmen wir an, dass eine lineare Kombination gleich null ist:

$$F_{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{(1)}^{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{(k)}^{i_k} = 0.$$

Wenden wir diese auf ein beliebiges geordnetes  $k$ -Tupel von Basisvektoren  $(E_{j_1}^{(1)}, \dots, E_{j_k}^{(k)})$  an. Durch dieselbe Rechnung wie oben folgt, dass jeder Koeffizient  $F_{j_1 \dots j_k}$  gleich null ist. Somit ist die einzige lineare Kombination von Elementen aus  $\mathcal{B}$ , die null ergibt, die triviale.  $\square$

Dieser Beweis zeigt übrigens, dass die Komponenten  $F_{i_1 \dots i_k}$  einer multilinearen Funktion  $F$  bezüglich der Basiselemente in  $\mathcal{B}$  durch (??) gegeben sind. Daher ist  $F$  vollständig durch seine Wirkung auf alle möglichen Folgen von Basisvektoren bestimmt.

## 12.2 Kovariante und kontravariante Tensoren

**Definition 12.3.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wenn  $k$  eine positive ganze Zahl ist, dann ist ein *kovarianter k-Tensor auf V* ein Element des  $k$ -fachen Tensorprodukts  $V^* \otimes \dots \otimes V^*$ , das man auch als reellwertige multilineare Funktion in  $k$  Elementen von  $V$  auffassen kann:

$$\alpha: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ Kopien}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Zahl  $k$  heißt der *Rang von  $\alpha$* .

Somit nimmt ein kovarianter Tensor  $k$  Vektoren als Argumente und gibt eine reelle Zahl aus. Ein 0-Tensor ist per Konvention einfach eine reelle Zahl. Wir bezeichnen den Vektorraum aller kovarianten  $k$ -Tensoren auf  $V$  mit der Notation

$$T^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ Kopien}}.$$

Zum Beispiel ist ein **Kovektor** ein kovarianter Tensor vom Rang 1. Ein Skalarprodukt ist ein kovarianter Tensor vom Rang 2.

**Definition 12.4.** Für jeden endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  definieren wir den Raum der *kontravarianten Tensoren auf  $V$  vom Rang  $k$*  als den Vektorraum

$$T^k(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ Kopien}}.$$

Elemente von  $T^k(V)$  kann man auch auffassen als

$$T^k(V) \cong \left\{ \text{multilineare Funktionen } \alpha: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ Kopien}} \rightarrow \mathbb{R} \right\}.$$

Durch Kombination der beiden vorherigen Definitionen erhalten wir Folgendes:

**Definition 12.5.** Für beliebige nichtnegative ganze Zahlen  $k, l$  definieren wir den Raum der *gemischten Tensoren auf  $V$  vom Typ  $(k, l)$*  als

$$T^{(k,l)}(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ Kopien}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ Kopien}}.$$

Somit gilt in unserer Notation zum Beispiel

$$T^{(0,0)}(V) = T^0(V^*) = T^0(V) = \mathbb{R},$$

$$T^{(0,1)}(V) = T^1(V^*) = V^*,$$

$$T^{(1,0)}(V) = T^1(V) = V,$$

$$T^{(0,k)}(V) = T^k(V^*),$$

$$T^{(k,0)}(V) = T^k(V).$$

**Bemerkung 12.6.** Die Notation  $T^{(k,l)}(V)$  ist nicht universell. Eine andere gebräuchliche Notation ist  $T_l^k(V)$ . In einer weiteren Notation werden die Rollen von  $k$  und  $l$  vertauscht; daher muss man beim Lesen anderer Quellen vorsichtig sein.