11. Kotangentialbündel und 1-Formen

Wir erinnern daran, dass für einen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Raum aller linearen Funktionale, d. h. linearer Abbildungen $\omega : V \to \mathbb{R}$, mit V^* bezeichnet wird und der **Dualraum** von V genannt wird. Elemente von V^* heißen **Kovektoren** auf V. Tatsächlich erhält man sofort eine Basis von V^*, sobald man eine Basis von V wählt, wie im folgenden Satz angegeben.

Vorschlag 11.1. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für eine beliebige Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V seien $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ die Kovektoren, die definiert sind durch*

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j,$$

*wobei δ^i_j das Kronecker-Delta-Symbol ist. Dann ist $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ eine Basis von V^*, die **duale Basis** zu (E_j) genannt wird, und somit gilt $\dim V^* = \dim V$.*

Für die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ wird die duale Basis beispielsweise mit $\left(e^1, \dots, e^n\right)$ bezeichnet und ***Standard-Dualbasis*** genannt. Man beachte, dass wir obere Indizes zur Bezeichnung der Kovektoren verwenden. Diese Basis-Kovektoren sind die linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$e^i(v) = e^i\left(v^1, \dots, v^n\right) = v^i.$$

In Matrixschreibweise wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ durch eine $1 \times n$-Matrix dargestellt, d. h. sie ist eine ***Zeilenmatrix***. Die Basis-Kovektoren können daher auch als die linearen Funktionale aufgefasst werden, die durch die Zeilenmatrizen

$$e^1 = (1\ 0\ \dots\ 0), \quad e^2 = (0\ 1\ 0\ \dots\ 0), \quad \dots, \quad e^n = (0\ \dots\ 0\ 1)$$

dargestellt werden. Im Allgemeinen gilt: Ist (e_j) eine Basis von V und (ε^i) die zugehörige duale Basis, dann gilt für jeden Vektor $v = v^j e_j \in V$

$$\varepsilon^i(v) = v^j\, \varepsilon^i(e_j) = v^j\, \delta^i_j = v^i.$$

Einen beliebigen Kovektor $\omega \in V^*$ können wir bezüglich der dualen Basis ausdrücken als

$$\omega = \omega_i\, \varepsilon^i, \tag{11.1}$$

wobei die Komponenten durch $\omega_i = \omega(e_i)$ bestimmt sind, und entsprechend ist die Wirkung von ω auf einen Vektor $v = v^j E_j$

$$\omega(v) = \omega_i\, v^i. \tag{11.2}$$

Notation: Wir schreiben Basis-Kovektoren stets mit oberen Indizes und Komponenten eines Kovektors mit unteren Indizes.

Seien V und W Vektorräume und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir definieren eine lineare Abbildung $L^*\colon W^* \to V^*$, die ***duale Abbildung*** oder ***Transponierte von L*** genannt wird, durch

$$(L^*\omega)(v) = \omega(Lv) \quad \text{für } \omega \in W^*,\ v \in V.$$

Die duale Abbildung erfüllt die folgenden Eigenschaften.

(1) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

(2) $(\mathrm{Id}_V)^*\colon V^* \to V^*$ *ist die Identitätsabbildung von* V^*.

Für einen Vektorraum V gibt es auch einen ***zweiten Dualraum*** $V^{**} = (V^*)^*$. Für jeden Vektorraum V existiert eine natürliche, basisunabhängige Abbildung $\xi\colon V \to V^{**}$, die wie folgt definiert ist. Für jeden Vektor $v \in V$ definieren wir ein lineares Funktional $\xi(v)\colon V^* \to \mathbb{R}$ durch

$$\xi(v)(\omega) = \omega(v) \quad \text{für } \omega \in V^*.$$

Vorschlag 11.2. *Für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V ist die Abbildung $\xi\colon V \to V^{**}$ ein Isomorphismus.*

Proof. Da $\dim V = \dim V^{**}$, genügt es zu zeigen, dass ξ injektiv ist. Sei $v \in V$ ein von Null verschiedener Vektor. Wir ergänzen v zu einer Basis $(v = E_1, \dots, E_n)$ von V, und bezeichnen die duale Basis von V^* mit $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Dann gilt $\xi(v) \neq 0$, denn
$$\xi(v)\left(\varepsilon^1\right) = \varepsilon^1(v) = \varepsilon^1(E_1) = 1. \qquad \square$$

Der vorstehende Satz zeigt, dass wir für endlichdimensionales V den Raum V^{**} eindeutig mit V selbst identifizieren können, da die Abbildung ξ kanonisch definiert ist, ohne Bezug auf eine Basis. Es ist wichtig zu bemerken, dass V^* zwar ebenfalls isomorph zu V ist (aus dem einfachen Grund, dass je zwei endlichdimensionale Vektorräume gleicher Dimension isomorph sind), es aber keinen *kanonischen* Isomorphismus $V \cong V^*$ gibt.

11.1 Tangential-Kovektoren auf Mannigfaltigkeiten

Sei nun M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ definieren wir den ***Kotangentialraum in*** p, bezeichnet mit T_p^*M, als den Dualraum von T_pM
$$T_p^*M = (T_pM)^*\,.$$
Elemente von T_p^*M heißen ***Tangential-Kovektoren in*** p oder einfach ***Kovektoren in*** p.

Sei (U, x^i) eine Koordinatenkarte, und die Koordinatenbasis $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)$ erzeugt eine duale Basis von T_p^*M, die wir mit $\left(\lambda^i\big|_p\right)$ bezeichnen. Jeder Kovektor $\omega \in T_p^*M$ lässt sich somit eindeutig schreiben als $\omega = \omega_i\, \lambda^i\big|_p$, wobei
$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right).$$

Versuchen wir zu verstehen, wie die Kovektoren unter einem Koordinatenwechsel aussehen. Sei $(\tilde{x}^j)$ ein weiteres System glatter Koordinaten, dessen Definitionsbereich p enthält, und sei $\left(\tilde{\lambda}^j\big|_p\right)$ die Basis von T_p^*M, die dual zu $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\big|_p\right)$ ist. Wir erinnern daran, dass sich die Koordinatenvektorfelder wie folgt transformieren:
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\bigg|_p. \tag{11.3}$$

Schreibt man ω in beiden Systemen als $\omega = \omega_i\, \lambda^i\big|_p = \tilde{\omega}_j\, \tilde{\lambda}^j\big|_p$, so kann man mit (11.3) die Komponenten ω_i durch $\tilde{\omega}_j$ ausdrücken:
$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \omega\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\bigg|_p\right) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\tilde{\omega}_j. \tag{11.4}$$

Somit sind die Komponenten eines Vektors, d. h. die n-Tupel $(v^1, \dots, v^n)$ und $(\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$, die zwei verschiedenen Koordinatensystemen (x^i) und $(\tilde{x}^j)$ zugeordnet sind, durch das Transformationsgesetz
$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)v^i$$
verbunden, und ein Kovektor transformiert sich gemäß der folgenden, leicht abweichenden Regel:
$$\omega_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(p)\tilde{\omega}_j. \tag{11.7}$$

11.2 Kovektorfelder oder 1-Formen

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M wird die disjunkte Vereinigung
$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$$
das ***Kotangentialbündel von*** M genannt. Es besitzt eine natürliche Projektionsabbildung $\pi\colon T^*M \to M$, die $\omega \in T_p^*M$ auf $p \in M$ abbildet. Wie oben bezeichnen wir für gegebene glatte lokale Koordinaten (x^i) auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und für jedes $p \in U$ die zu $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)$ duale Basis von T_p^*M mit $\left(\lambda^i\big|_p\right)$. Dies definiert n Abbildungen $\lambda^1, \dots, \lambda^n\colon U \to T^*M$, die ***Koordinaten-Kovektorfelder*** genannt werden. Wie im Fall des Tangentialbündels (Satz 4.8) besagt das nächste Ergebnis, dass das Kotangentialbündel ebenfalls eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer von M geerbten glatten Struktur ist.

Satz 11.3. *Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit. Das Kotangentialbündel T^*M besitzt eine eindeutige Topologie und glatte Struktur, die es zu einer glatten $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit machen.*

Proof. Wir überlassen den Beweis als Übungsaufgabe. □

Wie im Fall des Tangentialbündels liefern glatte lokale Koordinaten für M glatte lokale Koordinaten für das Kotangentialbündel. Sind (x^i) glatte Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist die Abbildung von $\pi^{-1}(U)$ nach $\mathbb{R}^{2n}$, gegeben durch

$$\xi_i \lambda^i\big|_p \mapsto \big(x^1(p), \ldots, x^n(p), \xi_1, \ldots, \xi_n\big),$$

eine glatte Koordinatenkarte für T^*M. Wir nennen (x^i, ξ_i) die ***natürlichen Koordinaten für*** T^*M, die zu (x^i) gehören.

Wie auch bei Vektorfeldern haben wir die folgende Definition.

Definition 11.4. Ein **Kovektorfeld** oder eine **(differentielle) 1-Form** ist eine stetige Abbildung $\omega : M \to T^*M$ mit

$$\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M.$$

Somit gilt für jedes $p \in M$: $\omega_p \in T_p^*M$.

In beliebigen glatten lokalen Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ lässt sich ein Kovektorfeld ω mittels der Koordinaten-Kovektorfelder (λ^i) schreiben als $\omega = \omega_i \lambda^i$ für n Funktionen $\omega_i : U \to \mathbb{R}$, die ***Komponentenfunktionen von ω*** genannt werden. Sie sind charakterisiert durch

$$\omega_i(p) = \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right).$$

Ist ω ein Kovektorfeld und X ein Vektorfeld auf M, so können wir eine Funktion $\omega(X) : M \to \mathbb{R}$ bilden durch

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \quad p \in M.$$

Schreibt man $\omega = \omega_i \lambda^i$ und $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ in lokalen Koordinaten, so hat $\omega(X)$ die lokale Koordinatendarstellung $\omega(X) = \omega_i X^i$.

Wie im Fall der Vektorfelder gibt es mehrere Möglichkeiten, die Glattheit eines Kovektorfeldes zu prüfen.

Vorschlag 11.5. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $\omega : M \to T^*M$ ein Kovektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *ω ist glatt.*
2. *In jeder glatten Koordinatenkarte sind die Komponentenfunktionen von ω glatt.*
3. *Für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist die Funktion $\omega(X)$ glatt auf M.*
4. *Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jedes glatte Vektorfeld X auf U ist die Funktion $\omega(X) : U \to \mathbb{R}$ glatt auf U.*

Wir bezeichnen den reellen Vektorraum aller glatten Kovektorfelder auf M mit $\mathfrak{X}^*M$ oder $\Omega^1(M)$. Für $f \in C^\infty(M)$ ist das Kovektorfeld $f\omega$ definiert als

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p. \tag{11.5}$$

11.3 Das Differential einer Funktion

Wir erinnern daran, dass der Gradient einer glatten reellwertigen Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ als das Vektorfeld definiert ist, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen von f sind:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Obwohl die partiellen Ableitungen einer glatten Funktion nicht koordinatenunabhängig als Komponenten eines Vektorfeldes interpretiert werden können, stellt sich heraus, dass sie als Komponenten eines Kovektorfeldes interpretiert werden können. Dies ist die wichtigste Anwendung von Kovektorfeldern.

Definition 11.6. Sei f eine glatte reellwertige Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Wir definieren ein Kovektorfeld df, das ***Differential von f*** genannt wird, durch

$$df_p(v) = vf \quad \text{für } v \in T_pM.$$

Vorschlag 11.7. *Das Differential einer glatten Funktion ist ein glattes Kovektorfeld.*

Proof. An jedem Punkt $p \in M$ hängt $df_p(v)$ offensichtlich linear von v ab, sodass df_p tatsächlich ein Kovektor in p ist. Um die Glattheit von df zu zeigen, verwenden wir Satz 11.5 (3): Für jedes glatte Vektorfeld X auf M ist die Funktion $df(X)$ glatt, da sie gleich Xf ist. □

Berechnen wir nun df in Koordinaten, d. h. bestimmen wir seine Koordinatendarstellung. Seien (x^i) glatte Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, und sei (λ^i) die zugehörige duale Koordinatenbasis auf U. Wir schreiben df in Koordinaten als $df_p = A_i(p)\,\lambda^i\big|_p$ für gewisse Funktionen $A_i \colon U \to \mathbb{R}$; dann folgt aus der Definition von df

$$A_i(p) = df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Dies ergibt die folgende Formel für die Koordinatendarstellung von df:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,\lambda^i\Big|_p. \tag{11.6}$$

Die Komponentenfunktionen von df in einer beliebigen glatten Koordinatenkarte sind also die partiellen Ableitungen von f bezüglich dieser Koordinaten. Somit ist das Differential von f in Koordinaten analog zum Gradienten von f in lokalen Koordinaten, aber df ist unabhängig von jedem Koordinatensystem sinnvoll definiert.

Wenden wir (11.6) auf den Spezialfall an, in dem f eine der Koordinatenfunktionen $x^j \colon U \to \mathbb{R}$ ist, so erhalten wir

$$dx^j\big|_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p)\,\lambda^i\big|_p = \delta^j_i\,\lambda^i\big|_p = \lambda^j\big|_p.$$

Mit anderen Worten, das Koordinaten-Kovektorfeld λ^j ist nichts anderes als das Differential dx^j. Daher lässt sich die Formel (11.6) für df_p umschreiben als

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,dx^i\big|_p,$$

oder als Gleichung zwischen Kovektor*feldern* statt Kovektoren:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i. \tag{11.11}$$

Von nun an verzichten wir auf die Notation λ^i für das Koordinaten-Korahmenfeld und verwenden stattdessen dx^i.

Beispiel 11.8. Ist $f(x,y) = x^2 y \cos x$ auf $\mathbb{R}^2$, so ist df gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial\left(x^2 y\cos x\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(x^2 y\cos x\right)}{\partial y}\,dy \\ &= \left(2xy\cos x - x^2 y\sin x\right)dx + x^2\cos x\,dy. \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass wir für eine glatte reellwertige Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$ nun zwei verschiedene Definitionen für das Differential von f in einem Punkt $p \in M$ haben. Zuvor hatten wir df_p als lineare Abbildung von T_pM nach $T_{f(p)}\mathbb{R}$ definiert. Jetzt haben wir df_p als Kovektor in p definiert, also als lineare Abbildung von T_pM nach $\mathbb{R}$. Dies sind tatsächlich dieselben Objekte, wenn man die kanonische Identifikation von $\mathbb{R}$ mit $T_{f(p)}\mathbb{R}$ berücksichtigt; eine einfache Möglichkeit, dies einzusehen, besteht darin festzustellen, dass beide in Koordinaten durch die Zeilenmatrix dargestellt werden, deren Komponenten die partiellen Ableitungen von f sind.

Vorschlag 11.9 (Eigenschaften des Differentials)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $f, g \in C^\infty(M)$.*

(a) Sind a und b Konstanten, so gilt $d(af + bg) = a\,df + b\,dg$.

(b) $d(fg) = f\,dg + g\,df$.

(c) $d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2$ auf der Menge, auf der $g \neq 0$.

(d) Ist f konstant, so gilt $df = 0$.

Vorschlag 11.10 (Funktionen mit verschwindendem Differential)**.** *Ist f eine glatte reellwertige Funktion auf einer glatten Mannigfaltigkeit M, so gilt $df = 0$ genau dann, wenn f auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant ist.*

Proof. Es genügt anzunehmen, dass M zusammenhängend ist, und zu zeigen, dass $df = 0$ genau dann gilt, wenn f konstant ist. Eine Richtung ist unmittelbar klar: Ist f konstant, so gilt $df = 0$. Umgekehrt sei $df = 0$, sei $p \in M$ und sei $\mathcal{C} = \{q \in M : f(q) = f(p)\}$. Ist q ein beliebiger Punkt in $\mathcal{C}$, so sei U eine glatte Koordinatenkugel mit Mittelpunkt q. Aus (11.11) folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv 0$ in U für jedes i, also ist f nach elementarer Analysis konstant auf U. Dies zeigt, dass $\mathcal{C}$ offen ist, und da $\mathcal{C}$ nach Stetigkeit abgeschlossen ist, muss $\mathcal{C}$ ganz M sein. Somit ist f überall gleich der Konstanten $f(p)$. $\square$