

Der nächste Satz ist das Hauptergebnis über Flüsse von Vektorfeldern.

Satz 9.15 (Fundamentalsatz über Flüsse). Sei V ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Es gibt einen eindeutigen glatten maximalen Fluss $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$, dessen infinitesimaler Erzeuger V ist. Dieser Fluss besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes $p \in M$ ist die Kurve $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p .

(b) Ist $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, so ist $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ das Intervall $\mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.

(c) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

offen in M , und $\theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus mit Inverser θ_{-t} .

(d) Für jedes $(t, p) \in \mathcal{D}$ gilt $(\theta_t)_* V(p) = V(\theta_t(p))$.

Proof. Der Beweis ist etwas lang, daher gehen wir schrittweise vor. Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit in Teil (a). Aus Proposition 9.5 wissen wir, dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine Integralkurve existiert. Seien $\gamma, \tilde{\gamma}: J \rightarrow M$ zwei Integralkurven von V , die auf demselben offenen Intervall J definiert sind, und gelte $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ für ein $t_0 \in J$. Sei S die Menge aller $t \in J$ mit $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$. Offenbar ist $S \neq \emptyset$, da $t_0 \in S$ nach Voraussetzung. Außerdem ist S abgeschlossen in J : Ist (t_n) eine Folge in S , die gegen t konvergiert, so folgt aus der Stetigkeit von γ und $\tilde{\gamma}$, dass $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t_n) = \tilde{\gamma}(t)$, also $t \in S$. Wir zeigen nun, dass S auch offen ist, und verwenden dann die Zusammenhangseigenschaft von J , um $J = S$ zu erhalten. Sei $t_1 \in S$. Dann sind γ und $\tilde{\gamma}$ in einer glatten Koordinatenumgebung des Punktes $p = \gamma(t_1)$ beide Lösungen derselben gewöhnlichen Differentialgleichung mit derselben Anfangsbedingung $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1) = p$. Nach dem Eindeutigkeitsatz von Satz 9.4 gilt $\gamma \equiv \tilde{\gamma}$ auf einem Intervall, das t_1 enthält. Also ist S offen in J . Da J zusammenhängend ist, folgt $S = J$, also $\gamma = \tilde{\gamma}$ auf ganz J . Somit stimmen zwei Integralkurven, die in einem Punkt übereinstimmen, auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.

Wir beweisen nun die Maximalität der Integralkurve. Sei $p \in M$, und sei $\mathcal{D}^{(p)}$ die Vereinigung aller offenen Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$, die 0 enthalten und auf denen eine Integralkurve mit Startpunkt p definiert ist. Definiere $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ durch $\theta^{(p)}(t) = \gamma(t)$, wobei γ eine beliebige Integralkurve mit Startpunkt p ist, die auf einem offenen Intervall definiert ist, das 0 und t enthält. Für einen gegebenen Punkt t stimmen alle solchen Integralkurven an t überein, wie oben erläutert. Daher ist $\theta^{(p)}$ wohldefiniert, d. h. ihr Wert ist unabhängig von der gewählten Integralkurve, und sie ist offensichtlich die eindeutige maximale Integralkurve mit Startpunkt p .

Setze nun

$$\mathcal{D} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$$

und definiere $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ durch $\theta(t, p) = \theta^{(p)}(t)$. Per Definition erfüllt θ Eigenschaft (a) der Satzaussage: Für jedes $p \in M$ ist $\theta^{(p)}$ die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p . Um zu überprüfen, dass θ tatsächlich ein Fluss ist, müssen wir die Gruppengesetze nachweisen. Fixiere $p \in M$ und $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, und schreibe $q = \theta(s, p) = \theta^{(p)}(s)$. Die Kurve $\gamma: \mathcal{D}^{(p)} - s \rightarrow M$, definiert durch $\gamma(t) = \theta^{(p)}(t + s)$, startet in q , und die Translationseigenschaft von Integralkurven zeigt, dass γ eine Integralkurve von V ist. Nach der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen stimmt γ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich mit $\theta^{(q)}$ überein. Dies ist äquivalent zum zweiten Gruppengesetz (9.7); das erste Gruppengesetz (9.6) folgt direkt aus der Definition. Also ist θ tatsächlich ein Fluss.

Aus der Maximalität von $\theta^{(q)}$ folgt, dass der Definitionsbereich von γ nicht größer als $\mathcal{D}^{(q)}$ sein kann, also $\mathcal{D}^{(p)} - s \subseteq \mathcal{D}^{(q)}$. Da $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$, folgt daraus $-s \in \mathcal{D}^{(q)}$, und das Gruppengesetz liefert $\theta^{(q)}(-s) = p$. Wenden wir dasselbe Argument mit $(-s, q)$ anstelle von (s, p) an, so erhalten wir $\mathcal{D}^{(q)} + s \subseteq \mathcal{D}^{(p)}$, was äquivalent ist zu $\mathcal{D}^{(q)} \subseteq \mathcal{D}^{(p)} - s$. Damit ist Teil (b) bewiesen.

Wir setzen den Beweis von Teil (a) fort, indem wir die Existenz einer solchen Integralkurve zeigen. Zuerst zeigen wir, dass \mathcal{D} offen in $\mathbb{R} \times M$ ist (also ein Flussgebiet ist) und dass $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ glatt ist. Definiere eine Teilmenge $W \subseteq \mathcal{D}$ als die Menge aller $(t, p) \in \mathcal{D}$, für die θ auf einer Produktumgebung von (t, p) der Form $J \times U \subseteq \mathcal{D}$ definiert und glatt ist, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist und $U \subseteq M$ eine Umgebung von p ist. Dann ist W offen in $\mathbb{R} \times M$, und die Einschränkung von θ auf W ist glatt. Es genügt also zu zeigen, dass $W = \mathcal{D}$. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existiert ein Punkt $(\tau, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$. Ohne Einschränkung sei $\tau > 0$.

Sei

$$t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, p_0) \notin W\}.$$

Nach dem Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen ist θ in einer Produktumgebung von $(0, p_0)$ definiert und glatt, also gilt $t_0 > 0$. Da $t_0 \leq \tau$ und $\mathcal{D}^{(p_0)}$ ein offenes Intervall ist, das 0 und τ enthält, folgt $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$. Sei $q_0 = \theta^{(p_0)}(t_0)$. Wiederum nach dem Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U_0 von q_0 , sodass $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subseteq W$. Wir verwenden nun das Gruppengesetz, um zu zeigen, dass θ glatt auf eine Umgebung von (t_0, p_0) fortgesetzt werden kann, was unserer Wahl von t_0 widerspricht.

Wähle ein $t_1 < t_0$ mit $t_1 + \varepsilon > t_0$ und $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$. Da $t_1 < t_0$, gilt $(t_1, p_0) \in W$, und daher gibt es eine Produktumgebung $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subseteq W$. Nach Definition von W bedeutet dies, dass θ auf $[0, t_1 + \delta) \times U_1$ definiert und glatt ist. Da $\theta(t_1, p_0) \in U_0$, können wir U_1 so klein wählen, dass θ die Menge $\{t_1\} \times U_1$ nach U_0 abbildet. Definiere $\tilde{\theta}: [0, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \rightarrow M$ durch

$$\tilde{\theta}(t, p) = \begin{cases} \theta_t(p), & p \in U_1, 0 \leq t < t_1, \\ \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & p \in U_1, t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Das Gruppengesetz für θ garantiert, dass diese Definitionen auf dem Überlappungsbereich übereinstimmen, und unsere Wahl von U_1, t_1 und ε stellt sicher, dass dies eine glatte Abbildung definiert. Durch die Translationseigenschaft ist für jedes p die Abbildung $t \mapsto \tilde{\theta}(t, p)$ eine Integralkurve von V , also ist $\tilde{\theta}$ eine glatte Fortsetzung von θ auf eine Umgebung von (t_0, p_0) . Dies widerspricht der Wahl von t_0 . Damit ist $W = \mathcal{D}$ gezeigt und der Beweis von Teil (a) abgeschlossen.

Wir beweisen nun (c). Dass M_t offen ist, folgt unmittelbar daraus, dass \mathcal{D} offen ist. Aus Teil (b) erhalten wir

$$\begin{aligned} p \in M_t &\Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Rightarrow \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t \\ &\Rightarrow -t \in \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} \Rightarrow \theta_t(p) \in M_{-t}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass θ_t die Menge M_t nach M_{-t} abbildet. Außerdem zeigen die Gruppengesetze, dass $\theta_{-t} \circ \theta_t$ auf M_t die Identität ist. Vertauscht man die Rollen von t und $-t$, so erhält man, dass $\theta_t \circ \theta_{-t}$ auf M_{-t} die Identität ist. Damit ist θ_t ein Diffeomorphismus.

Schließlich beweisen wir Teil (d). Sei $\theta(t_0, p) = q$. Wir möchten zeigen, dass $(\theta_{t_0})_*(V(p)) = V(\theta_{t_0}(p)) = V(q)$. Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((\theta_{t_0})_*(V(p)))f &= V_p(f \circ \theta_{t_0}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \theta_{t_0} \circ \theta^p(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta_{t_0+t}(p)) \quad (\text{mit dem Gruppengesetz}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^q(t)) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta^q(t) \right) f = V(q)f \quad (\text{da } \theta^q \text{ eine Integralkurve von } V \text{ ist}), \end{aligned}$$

womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist. □

Definition 9.16. Der Fluss θ in Satz 9.15 heißt der **von V erzeugte Fluss** oder einfach der **Fluss von V** .

Heuristisch stammt der Begriff „infinitesimaler Erzeuger“ daher, dass in einer glatten Karte eine gute Approximation an eine Integralkurve erhalten werden kann, indem man viele kleine Geradenstücke zusammensetzt, wobei Richtung und Länge jeder Bewegung durch den Wert des Vektorfeldes an dem Punkt bestimmt werden, den man im vorherigen Schritt erreicht hat. Intuitiv kann man sich einen Fluss als eine Folge von unendlich vielen infinitesimal kleinen linearen Schritten vorstellen; daher „erzeugt“ V den Fluss θ .

Vorschlag 9.17 (Natürlichkeit von Flüssen). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, sei $F: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, und seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Sei θ der Fluss von X und η der Fluss von Y . Sind X und Y F -verwandt, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$, dass $F(M_t) \subseteq N_t$ und $\eta_t \circ F = F \circ \theta_t$ auf M_t :

$$\begin{array}{ccc} M_t & \xrightarrow{F} & N_t \\ \theta_t \downarrow & & \downarrow \eta_t \\ M_{-t} & \xrightarrow{F} & N_{-t}. \end{array}$$

Proof. Aus der Eigenschaft von Integralkurven wissen wir, dass für jedes $p \in M$ die Kurve $F \circ \theta^{(p)}$ eine Integralkurve von Y mit Startpunkt $F \circ \theta^{(p)}(0) = F(p)$ ist. Daher muss nach Eindeutigkeit von Integralkurven die maximale Integralkurve $\eta^{(F(p))}$ mindestens auf dem Intervall $\mathcal{D}^{(p)}$ definiert sein, und es gilt $F \circ \theta^{(p)} = \eta^{(F(p))}$ auf diesem Intervall. Das bedeutet:

$$p \in M_t \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(F(p))} \Rightarrow F(p) \in N_t,$$

was äquivalent zu $F(M_t) \subseteq N_t$ ist, und

$$F(\theta^{(p)}(t)) = \eta^{(F(p))}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{D}^{(p)},$$

was äquivalent zu $\eta_t \circ F(p) = F \circ \theta_t(p)$ für alle $p \in M_t$ ist. □

Als Korollar erhalten wir: Ist $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und ist θ der Fluss eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist der Fluss von F_*X gegeben durch

$$\eta_t = F \circ \theta_t \circ F^{-1},$$

mit Definitionsbereich $N_t = F(M_t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

9.3 Vollständige Vektorfelder

Definition 9.18 (Vollständige Vektorfelder). Ein glattes Vektorfeld heißt **vollständig**, wenn es einen globalen Fluss erzeugt, oder äquivalent, wenn jede seiner maximalen Integralkurven für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Es ist nicht immer leicht, einem Vektorfeld direkt anzusehen, ob es vollständig ist oder nicht. Wenn man die Differentialgleichung explizit lösen kann, um alle Integralkurven zu bestimmen, und diese für alle Zeiten existieren, dann ist das Vektorfeld vollständig. Andererseits ist es nicht vollständig, wenn man eine einzige Integralkurve finden kann, die nicht auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden kann, wie wir es in den obigen Beispielen getan haben. Häufig ist es jedoch unmöglich, die Differentialgleichung explizit zu lösen; daher ist es nützlich, allgemeine Kriterien zu haben, um zu bestimmen, wann ein Vektorfeld vollständig ist.

Wir werden unten zeigen, dass alle glatt kompakt getragenen Vektorfelder und daher alle glatten Vektorfelder auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig sind. Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma.

Lemma 9.19. Sei V ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , und sei θ sein Fluss. Angenommen, es gibt eine positive Zahl ε , sodass für jedes $p \in M$ der Definitionsbereich von $\theta^{(p)}$ das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ enthält. Dann ist V vollständig.

Bemerkung 9.20. Was besagt dieses Lemma eigentlich? Es besagt, dass, wenn eine Integralkurve eines Vektorfeldes aufhört zu existieren, das Vektorfeld in endlicher Zeit „explodieren“ muss. Mit anderen Worten: Wenn eine Integralkurve eines Vektorfeldes für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit auch nur für eine kurze einheitliche Zeit existieren kann, dann muss sie für alle Zeiten existieren.

Proof. Wir beweisen dies durch Widerspruch. Die grundlegende Idee ist, die Translationseigenschaft von Integralkurven zu verwenden. Angenommen, für ein $p \in M$ sei der Definitionsbereich $\mathcal{D}^{(p)}$ von $\theta^{(p)}$ nach oben beschränkt. (Ein ähnlicher Beweis funktioniert, wenn er nach unten beschränkt ist.) Sei $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$, sei t_0 eine positive Zahl mit $b - \varepsilon < t_0 < b$, und sei $q = \theta^{(p)}(t_0)$. Die Voraussetzung impliziert, dass $\theta^{(q)}(t)$ mindestens für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Definiere eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & -\varepsilon < t < b, \\ \theta^{(q)}(t - t_0), & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Diese beiden Definitionen stimmen dort überein, wo sie sich überlappen, denn

$$\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = \theta_{t-t_0} \circ \theta_{t_0}(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$$

nach dem Gruppengesetz für θ . Durch die Translationseigenschaft ist γ eine Integralkurve mit Startpunkt p . Da $t_0 + \varepsilon > b$, bedeutet dies, dass γ mit Startpunkt p über b hinaus existiert, was der Definition von b widerspricht. Somit existiert γ für alle $t \in \mathbb{R}$, und daher ist V ein vollständiges Vektorfeld. □

Satz 9.21. Jedes glatt kompakt getragene Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist vollständig. Insbesondere ist auf einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit jedes glatte Vektorfeld vollständig.

Proof. Sei V ein kompakt getragenes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , und sei $K = \text{supp } V$. Für jedes $p \in K$ gibt es eine Umgebung U_p von p und eine positive Zahl ε_p , sodass der Fluss von V mindestens auf $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p$ definiert ist. Wegen der Kompaktheit überdecken endlich viele solcher Mengen U_{p_1}, \dots, U_{p_k} die Menge K . Mit

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$$

folgt, dass jede maximale Integralkurve mit Startpunkt in K mindestens auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Da $V \equiv 0$ außerhalb von K gilt, ist jede Integralkurve mit Startpunkt in $M \setminus K$ konstant und kann daher auf ganz \mathbb{R} definiert werden. Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 9.19 erfüllt, und daher ist V vollständig. \square

10. Lie-Ableitungen

Wir wissen, wie man reellwertige Funktionen in Richtung eines Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit differenziert. In der Tat ist ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ per Definition ein Operator, der auf eine glatte Funktion f wirkt und eine Zahl vf liefert, die wir als Richtungsableitung von f in p interpretieren. Wie können wir Richtungsableitungen eines Vektorfeldes in Richtung eines gegebenen Vektors sinnvoll definieren? Beginnen wir mit dem vertrauten Fall der euklidischen Räume. Wir können die Richtungsableitung eines glatten Vektorfeldes W in Richtung eines Vektors $v \in T_p \mathbb{R}^n$ definieren. Sie ist der Vektor

$$D_v W(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} W_{p+tv} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_{p+tv} - W_p}{t}. \tag{10.1}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $D_v W(p)$ ausgewertet werden kann, indem man D_v auf jede Komponente von W einzeln anwendet:

$$D_v W(p) = D_v W^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Leider hängt diese Definition stark davon ab, dass \mathbb{R}^n ein Vektorraum ist, sodass die Tangentialvektoren W_{p+tv} und W_p beide als Elemente von \mathbb{R}^n aufgefasst werden können. Wenn wir (10.1) auf einer Mannigfaltigkeit nachahmen wollen, können wir versuchen, $p + tv$ durch eine Kurve $\gamma(t)$ zu ersetzen, die in p beginnt und deren Anfangsgeschwindigkeit v ist. Aber selbst mit dieser Ersetzung ergibt der Differenzenquotient immer noch keinen Sinn, da $W_{\gamma(t)}$ und $W_{\gamma(0)}$ Elemente der beiden verschiedenen Vektorräume $T_{\gamma(t)} M$ bzw. $T_{\gamma(0)} M$ sind. Im euklidischen Raum war das kein Problem, weil es eine kanonische Identifizierung jedes Tangentialraums mit \mathbb{R}^n selbst gibt; aber auf einer Mannigfaltigkeit gibt es keine solche Identifizierung. Daher gibt es keine koordinatenunabhängige Möglichkeit, die Richtungsableitung von W in Richtung eines Vektors v sinnvoll zu definieren.

Wir beheben dieses Problem, indem wir den Vektor $v \in T_p M$ durch ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(M)$ ersetzen, sodass wir den Fluss von V verwenden können, um Werte von W nach p zurückzuschieben und dann zu differenzieren.

Definition 10.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, V ein glattes Vektorfeld auf M und θ der Fluss von V . Für jedes glatte Vektorfeld W auf M definieren wir ein Vektorfeld auf M , bezeichnet mit $\mathcal{L}_V W$ und genannt die **Lie-Ableitung von W bezüglich V** , durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V W)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} (W_{\theta_t(p)}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} (W_{\theta_t(p)}) - W_p}{t}, \end{aligned} \tag{10.2}$$

sofern die Ableitung existiert.

Für kleine $t \neq 0$ ergibt zumindest der Differenzenquotient Sinn: θ_t ist in einer Umgebung von p definiert, und θ_{-t} ist die Inverse von θ_t , sodass sowohl $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)} (W_{\theta_t(p)})$ als auch W_p Elemente von $T_p M$ sind.

Lemma 10.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Dann existiert $(\mathcal{L}_V W)_p$ für jedes $p \in M$, und $\mathcal{L}_V W$ ist ein glattes Vektorfeld.

Proof. Wir prüfen, dass die Komponentenfunktionen des Vektorfeldes $\mathcal{L}_V W$ in jeder Koordinatenkarte glatt sind. Sei θ der Fluss von V und für ein beliebiges $p \in M$ sei $(U, (x^i))$ eine glatte Karte, die p enthält. Wähle ein offenes Intervall J_0 , das 0 enthält, und eine offene Teilmenge $U_0 \subseteq U$, die p enthält, sodass $\theta : J_0 \times U_0 \rightarrow U$ abbildet. Das können wir stets mit Hilfe der Stetigkeit des Flusses θ tun. Für $(t, x) \in J_0 \times U_0$ schreiben wir die Komponentenfunktionen von θ als $(\theta^1(t, x), \dots, \theta^n(t, x))$. Dann ist für jedes $(t, x) \in J_0 \times U_0$ die Matrix von $d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)} : T_{\theta_t(x)} M \rightarrow T_x M$ gegeben durch

$$\left[\frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, x)) \right]_{ij},$$

und folglich

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)} (W_{\theta_t(x)}) = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, x)) W^j(\theta(t, x)) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x.$$

Da θ^i und W^j glatte Funktionen sind, hängt der Koeffizient von $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$ glatt von (t, x) ab. Daraus folgt, dass $(\mathcal{L}_V W)_x$, das man durch Ableiten dieses Ausdrucks nach t und Einsetzen von $t = 0$ erhält, für jedes $x \in U_0$ existiert und glatt von x abhängt. \square

Während Gleichung 10.2 genau erklärt, wie man die Ableitung eines Vektorfeldes in Richtung eines anderen sinnvoll definiert, ist sie für explizite Berechnungen nicht sehr nützlich, da der Fluss typischerweise schwierig oder unmöglich explizit aufzuschreiben ist. Glücklicherweise gibt es eine einfache Formel zur Berechnung der Lie-Ableitung, ohne den Fluss explizit zu bestimmen.

Satz 10.3. *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so gilt $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

Proof. Sei θ der Fluss von X und sei $p \in M$. Wir bemerken zunächst, dass (10.2) äquivalent zum Ausdruck

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}(\theta_t^* Y)_p|_{t=0}, \quad \text{wobei } (\theta_t^* Y)_p = (\theta_t^{-1})_{*\theta_t(p)} Y_{\theta_t(p)}$$

ist.

Erinnern wir uns auch daran, dass für jedes $f \in C^\infty(M)$ gilt $(Xf)_p = \frac{d}{dt}(\theta_t^* f)_p|_{t=0}$, wobei $\theta_t^* f = f \circ \theta_t$, und analog haben wir $(\theta_t^* Y f)_p = (\theta_t^* Y)_p(\theta_t^* f)$. Wir verwenden nun all dies und rechnen. Wir haben

$$(X(Yf))_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y f)_p - (Yf)_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p(\theta_t^* f) - (Yf)_p}{t}.$$

Wir addieren und subtrahieren $(\theta_t^* Y)_p f$ und erhalten

$$\begin{aligned} (X(Yf))_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p(\theta_t^* f) - (\theta_t^* Y)_p f + (\theta_t^* Y)_p f - Y_p f}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\theta_t^* Y)_p \frac{(\theta_t^* f) - f}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\theta_t^* Y)_p - Y_p}{t} f = Y_p X f + (\mathcal{L}_X Y)_p. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir, dass $XY = YX + \mathcal{L}_X Y$. □

Wir haben nun eine geometrische Interpretation der Lie-Klammer zweier Vektorfelder: Sie ist die Richtungsableitung des zweiten Vektorfeldes entlang des Flusses des ersten. Daraus ergibt sich unmittelbar Folgendes.

Vorschlag 10.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. $\mathcal{L}_V W = -\mathcal{L}_W V$.
2. $\mathcal{L}_V [W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$.
3. $\mathcal{L}_{[V, W]} X = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V X$.
4. Wenn $g \in C^\infty(M)$, dann gilt $\mathcal{L}_V (gW) = (Vg)W + g\mathcal{L}_V W$.
5. Wenn $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, dann gilt $F_*(\mathcal{L}_V X) = \mathcal{L}_{F_* V} F_* X$.

Man beachte, dass Proposition 10.4 (d) unmittelbar aus Proposition 8.19 (d) folgt, und sie hat diese Form, weil die Lie-Klammer $[fV, gW]$ als die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_{fV}(gW)$ aufgefasst werden kann, sie erfüllt eine Produktregel in g und W ; und da sie auch als $-\mathcal{L}_{gW}(fV)$ aufgefasst werden kann, erfüllt sie ebenfalls eine Produktregel in f und V .

Sind V und W Vektorfelder auf M und θ der Fluss von V , so drückt die Lie-Ableitung $(\mathcal{L}_V W)_p$ per Definition die t -Ableitung des zeitabhängigen Vektors $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) \in T_p M$ bei $t = 0$ aus. Die nächste Proposition zeigt, wie sie auch verwendet werden kann, um die Ableitung dieses Ausdrucks zu anderen Zeitpunkten zu berechnen.

Vorschlag 10.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Sei θ der Fluss von V . Für jedes (t_0, p) im Definitionsbereich von θ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = d(\theta_{-t_0})((\mathcal{L}_V W)_{\theta_{t_0}(p)}). \quad (10.3)$$

Proof. Sei $p \in M$ beliebig, sei $\mathcal{D}^{(p)} \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich der Integralkurve $\theta^{(p)}$, und betrachte die Abbildung $X : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow T_p M$, gegeben durch $X(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)})$. Dieselbe Idee wie im Beweis von Lemma 10.2 zeigt,

dass X eine glatte Kurve im Vektorraum $T_p M$ ist. Durch die Variablensubstitution $t = t_0 + s$ erhalten wir

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} X(t_0 + s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{-t_0-s})(W_{\theta_{s+t_0}(p)}) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{-t_0}) \circ d(\theta_{-s})(W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \\ &= d(\theta_{-t_0}) \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} d(\theta_{-s})(W_{\theta_s(\theta_{t_0}(p))}) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, weil $d(\theta_{-t_0}) : T_{\theta_{t_0}(p)} M \rightarrow T_p M$ eine lineare Abbildung ist, die unabhängig von s ist. Nach der Definition der Lie-Ableitung ist dieser letzte Ausdruck gleich der rechten Seite von (10.3). \square

10.1 Kommutierende Vektorfelder

Definition 10.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Wir sagen, dass V und W **kommutieren**, wenn $VWf = WVf$ für jede glatte Funktion f gilt, oder äquivalent, wenn $[V, W] \equiv 0$ ist.

Ist θ ein glatter Fluss, so heißt ein Vektorfeld W **invariant unter θ** , wenn W für jedes t mit sich selbst θ_t -verwandt ist, oder äquivalent, wenn $d(\theta_t)_p(W_p) = W_{\theta_t(p)}$ für alle (t, p) im Definitionsbereich von θ gilt.

Die nächste Proposition zeigt, dass diese beiden Begriffe eng miteinander verbunden sind.

Vorschlag 10.7. Für glatte Vektorfelder V und W auf einer glatten Mannigfaltigkeit M sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) V und W kommutieren.
- (b) W ist invariant unter dem Fluss von V .
- (c) V ist invariant unter dem Fluss von W .

Folglich ist jedes glatte Vektorfeld invariant unter seinem eigenen Fluss.

Proof. Sei $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, und bezeichne θ den Fluss von V . Wir beweisen (b) \implies (a). Wenn (b) gilt, dann ist $W_{\theta_t(p)} = d(\theta_t)_p(W_p)$, wann immer (t, p) im Definitionsbereich von θ liegt. Wendet man $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$ auf beide Seiten an, so schließen wir, dass $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = W_p$ gilt, was nach der Definition der Lie-Ableitung oder (10.2) $[V, W] = \mathcal{L}_V W = 0$ impliziert. Dasselbe Argument zeigt, dass (c) (a) impliziert.

Um zu zeigen, dass (a) (b) impliziert, nehmen wir an, dass $[V, W] = \mathcal{L}_V W = 0$. Sei $p \in M$ beliebig, und sei $X(t) = d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)})$ für $t \in \mathcal{D}^{(p)}$. Proposition 10.5 zeigt, dass $X'(t) \equiv 0$. Da $X(0) = W_p$, impliziert dies, dass $X(t) = W_p$ für alle $t \in \mathcal{D}^{(p)}$ gilt, und das Anwenden von $d(\theta_t)_p$ auf beide Seiten liefert die Identität, die besagt, dass W invariant unter θ ist. Analog impliziert (a) (c). \square

Wir setzen nun kommutierende Vektorfelder in Beziehung zur Beziehung zwischen ihren jeweiligen Flüssen. Genauer gesagt wird der nächste Satz beweisen, dass zwei Vektorfelder genau dann kommutieren, wenn ihre Flüsse kommutieren. Aber was bedeutet es, dass zwei Flüsse miteinander kommutieren?

Seien V und W glatte Vektorfelder auf M , und seien θ und ψ ihre jeweiligen Flüsse. Wenn V und W vollständige Vektorfelder sind und somit θ und ψ globale Flüsse, so bedeutet das Kommutieren ihrer Flüsse, dass

$$\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Wenn jedoch entweder V oder W nicht vollständig ist, können wir höchstens hoffen, dass diese Gleichung für alle s und t gilt, für die beide Seiten definiert sind.

Leider müssen ihre Flüsse selbst dann nicht in diesem naiven Sinne kommutieren, wenn die Vektorfelder kommutieren, denn es gibt Beispiele kommutierender Vektorfelder V und W sowie spezielle Wahlen von t, s und p , für die sowohl $\theta_t \circ \psi_s(p)$ als auch $\psi_s \circ \theta_t(p)$ definiert sind, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 10.8. Betrachte \mathbb{R}^3 und betrachte die Vektorfelder

$$V = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Seien θ und ψ der Fluss von V bzw. W . Zeige, dass V und W kommutieren, aber es existieren $p \in \mathbb{R}^3$ und $s, t \in \mathbb{R}$, sodass $\theta_t \circ \psi_s(p)$ und $\psi_s \circ \theta_t(p)$ beide existieren, aber nicht gleich sind. (**Hinweis:** Zum Beispiel erfüllen $p = (1, -1, 0)$ und $s = 2, t = -2$ die Bedingung. Vielleicht schreibe die Gleichung für die Integralkurven auf.)

Hier ist das Problem: Wenn $\theta_t \circ \psi_s(p)$ für $t = t_0$ und $s = s_0$ definiert ist, dann muss es nach den Eigenschaften der Flussdomänen für alle t in einem offenen Intervall, das 0 und t_0 enthält, definiert sein, aber die analoge Aussage muss für s nicht gelten – es könnte Werte von s zwischen 0 und s_0 geben, für die sich die in $\psi_s(p)$ startende Integralkurve von V nicht bis $t = t_0$ erstreckt.

Daher treffen wir folgende Definition.

Definition 10.9. Sind θ und ψ Flüsse auf M , so sagen wir, dass θ und ψ **kommutieren**, wenn die folgende Bedingung für jedes $p \in M$ gilt: Wann immer J und K offene Intervalle sind, die 0 enthalten, sodass einer der Ausdrücke $\theta_t \circ \psi_s(p)$ oder $\psi_s \circ \theta_t(p)$ für alle $(s, t) \in J \times K$ definiert ist, sind beide definiert und gleich. Für globale Flüsse ist dies dasselbe, wie zu sagen, dass $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$ für alle s und t gilt.

Hier ist das Hauptresultat für kommutierende Flüsse.

Satz 10.10. *Glatte Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren.*

Proof. Seien V und W glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M , und seien θ und ψ ihre jeweiligen Flüsse. Nehmen wir zunächst an, dass V und W kommutieren. Angenommen, $p \in M$, und J und K sind offene Intervalle, die 0 enthalten, sodass $\psi_s \circ \theta_t(p)$ für alle $(s, t) \in J \times K$ definiert ist. Nach Proposition 10.7 impliziert die Voraussetzung, dass V invariant unter ψ ist. Fixiere ein beliebiges $s \in J$ und betrachte die Kurve $\gamma : K \rightarrow M$, definiert durch $\gamma(t) = \psi_s \circ \theta_t(p) = \psi_s(\theta^{(p)}(t))$. Diese Kurve erfüllt $\gamma(0) = \psi_s(p)$, und ihre Geschwindigkeit bei $t \in K$ ist

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(\psi_s(\theta^{(p)}(t))) = d(\psi_s)(\theta^{(p)'}(t)) = d(\psi_s)(V_{\theta^{(p)}(t)}) = V_{\gamma(t)}.$$

Somit ist γ eine Integralkurve von V , die in $\psi_s(p)$ beginnt. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt daher

$$\gamma(t) = \theta^{\psi_s(p)}(t) = \theta_t(\psi_s(p)).$$

Dies beweist, dass θ und ψ kommutieren.

Nehmen wir umgekehrt an, dass die Flüsse kommutieren, und sei $p \in M$. Wenn $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\psi_s \circ \theta_t(p)$ definiert ist, wann immer $|s| < \varepsilon$ und $|t| < \varepsilon$, dann garantiert die Voraussetzung, dass $\psi_s \circ \theta_t(p) = \theta_t \circ \psi_s(p)$ für alle solchen s und t gilt. Dies lässt sich in der Form

$$\psi^{\theta_t(p)}(s) = \theta_t(\psi^{(p)}(s))$$

umschreiben. Differenziert man diese Beziehung nach s , so erhält man

$$W_{\theta_t(p)} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \psi^{\theta_t(p)}(s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \theta_t(\psi^{(p)}(s)) = d(\theta_t)_p(W_p).$$

Wendet man $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$ auf beide Seiten an, so schließen wir

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = W_p.$$

Differenziert man nach t und wendet die Definition der Lie-Ableitung an, so zeigt sich, dass $(\mathcal{L}_V W)_p = 0$. □