

## 9.2 Flüsse von Vektorfeldern

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . Angenommen, für jeden Punkt  $p \in M$  besitzt  $V$  eine eindeutige Integralkurve mit Startpunkt  $p$ , die für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert ist; wir bezeichnen sie mit  $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$ . (**Wir wissen nicht, ob dies immer möglich ist oder nicht.**) Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  können wir eine Abbildung  $\theta_t: M \rightarrow M$  definieren, indem wir jedem  $p \in M$  den Punkt zuordnen, der entsteht, wenn man der Integralkurve mit Startpunkt  $p$  für die Zeit  $t$  folgt:

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Jede Abbildung  $\theta_t$  „verschiebt“ die Mannigfaltigkeit entlang der Integralkurven um die Zeit  $t$ . Dann ist  $t \mapsto \theta^{(p)}(t+s)$  eine Integralkurve von  $V$  mit Startpunkt  $q = \theta^{(p)}(s)$ , und da wir die Eindeutigkeit von Integralkurven voraussetzen, gilt  $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t+s)$ . Übersetzen wir dies in eine Aussage über die Abbildungen  $\theta_t$ , so erhalten wir

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Zusammen mit der Gleichung  $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$ , die per Definition gilt, impliziert dies, dass die Abbildung

$$\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \text{ eine Wirkung der additiven Gruppe } \mathbb{R} \text{ auf } M \text{ ist.}$$

**Definition 9.6.** Ein **globaler Fluss** auf  $M$ , manchmal auch **Einparameter-Gruppenwirkung** genannt, ist eine stetige linke  $\mathbb{R}$ -Wirkung auf  $M$ ; das heißt, eine stetige Abbildung  $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , die für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  und  $p \in M$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t+s, p), \quad \theta(0, p) = p. \quad (9.3)$$

Zu einem globalen Fluss  $\theta$  auf  $M$  gehören die folgenden zwei Familien von Abbildungen:

- Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  definiere eine stetige Abbildung  $\theta_t: M \rightarrow M$  durch

$$\theta_t(p) = \theta(t, p).$$

Diese erfüllen

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}, \quad \theta_0 = \text{Id}_M. \quad (9.4)$$

Wie bei jeder stetigen Gruppenwirkung ist jede Abbildung  $\theta_t: M \rightarrow M$  ein Homöomorphismus; ist der Fluss glatt, so ist  $\theta_t$  ein Diffeomorphismus.

- Für jedes  $p \in M$  definiere eine Kurve  $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$  durch

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p).$$

Das Bild dieser Kurve ist **die Bahn von  $p$  unter der Gruppenwirkung**.

Die nächste Proposition zeigt, dass jeder glatte globale Fluss von den Integralkurven eines gewissen glatten Vektorfeldes genau in der oben beschriebenen Weise stammt. Bevor wir das Resultat formulieren, geben wir die folgende Definition.

**Definition 9.7.** Ist  $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  ein glatter globaler Fluss, so definieren wir für jedes  $p \in M$  einen Tangentialvektor  $V_p \in T_p M$  durch

$$V_p = \theta^{(p)'}(0). \quad (9.5)$$

Die Zuordnung  $p \mapsto V_p$  ist ein Vektorfeld auf  $M$ , das **infinitesimaler Erzeuger von  $\theta$**  genannt wird.

**Lemma 9.8.** Sei  $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  ein glatter globaler Fluss auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ . Der infinitesimale Erzeuger  $V$  von  $\theta$  ist ein glattes Vektorfeld auf  $M$ , und jede Kurve  $\theta^{(p)}$  ist eine Integralkurve von  $V$ .

*Proof.* Um zu zeigen, dass  $V$  glatt ist, zeigen wir, dass  $Vf$  für jedes  $f \in C^\infty(U)$ ,  $U \subseteq M$ , glatt ist. Für ein solches  $f$  und jedes  $p \in U$  beachte man einfach:

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)'}(0)f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t,p)).$$

Da  $f(\theta(t,p))$  durch Komposition eine glatte Funktion von  $(t,p)$  ist, ist auch ihre partielle Ableitung nach  $t$  glatt. Also hängt  $Vf(p)$  glatt von  $p$  ab, und somit ist  $V$  glatt.

Als Nächstes müssen wir zeigen, dass  $\theta^{(p)}$  eine Integralkurve von  $V$  ist, also dass  $\theta^{(p)'}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$  für alle  $p \in M$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  beliebig und setze  $q = \theta^{(p)}(t_0) = \theta_{t_0}(p)$ . Zu zeigen ist also  $\theta^{(p)'}(t_0) = V_q$ . Nach dem Gruppengesetz gilt für alle  $t$ :

$$\theta^{(q)}(t) = \theta_t(q) = \theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t+t_0).$$

Daher gilt für jede glatte reellwertige Funktion  $f$ , die in einer Umgebung von  $q$  definiert ist,

$$\begin{aligned} V_q f &= \theta^{(q)'}(0)f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t+t_0)) \\ &= \theta^{(p)'}(t_0)f, \end{aligned}$$

wie zu zeigen war. □

**Beispiel 9.9 ((Globale Flüsse).)** Die beiden in den Beispielen 9.2 und 9.3 beschriebenen Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^2$  hatten beide Integralkurven, die für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert sind; daher erzeugen sie globale Flüsse. Mithilfe der Ergebnisse dieser Beispiele können wir die Flüsse explizit angeben.

(a) Der Fluss von  $V = \partial/\partial x$  in  $\mathbb{R}^2$  ist die Abbildung  $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gegeben durch

$$\tau_t(x, y) = (x + t, y).$$

Für jedes von null verschiedene  $t \in \mathbb{R}$  verschiebt  $\tau_t$  die Ebene nach rechts ( $t > 0$ ) bzw. nach links ( $t < 0$ ) um die Strecke  $|t|$ .

(b) Der Fluss von  $W = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$  ist die Abbildung  $\theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gegeben durch

$$\theta_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  rotiert  $\theta_t$  die Ebene um den Winkel  $t$  um den Ursprung.

Also gilt:

Infinitesimale Erzeuger globaler Flüsse sind glatte Vektorfelder.

Es stellt sich eine natürliche Frage: **Gilt die Umkehrung der obigen Aussage, d. h. muss ein gegebenes glattes  $V \in \mathfrak{X}(M)$  der infinitesimale Erzeuger eines globalen Flusses sein?** Betrachten wir einige Beispiele glatter Vektorfelder, deren Integralkurven nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert sind.

**Beispiel 9.10.** Sei  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  mit Standardkoordinaten  $(x, y)$ , und sei  $V$  das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x}$  auf  $M$ . Die eindeutige Integralkurve von  $V$  mit Startpunkt  $(-1, 0) \in M$  ist  $\gamma(t) = (t-1, 0)$ . In diesem Fall kann  $\gamma$  jedoch nicht stetig über  $t = 1$  hinaus fortgesetzt werden.

**Beispiel 9.11.** Sei  $M$  ganz  $\mathbb{R}^2$ , und sei  $W = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ . Die eindeutige Integralkurve von  $W$  mit Startpunkt  $(1, 0)$  ist

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{1-t}, 0 \right).$$

Auch diese Kurve kann nicht über  $t = 1$  hinaus fortgesetzt werden, da ihre  $x$ -Koordinate für  $t \nearrow 1$  unbeschränkt wird.

Somit erzeugt nicht jedes glatte Vektorfeld  $V$  durch infinitesimale Erzeugung einen globalen Fluss.

**Definition 9.12.** Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so ist ein **Flussgebiet** für  $M$  eine offene Teilmenge  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $p \in M$  die Menge

$$\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

ein offenes Intervall ist, das 0 enthält.

Ein **Fluss** auf  $M$  ist eine stetige Abbildung  $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ , wobei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$  ein Flussgebiet ist, die die folgenden Gruppengesetze erfüllt: Für alle  $p \in M$  gilt

$$\theta(0, p) = p, \tag{9.6}$$

und für alle  $s \in \mathcal{D}^{(p)}$  und  $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$  mit  $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$  gilt

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p). \tag{9.7}$$

Der Fluss  $\theta$  wird manchmal auch **lokaler Fluss** oder **lokale Einparameter-Gruppenwirkung** genannt.

Ist  $\theta$  glatt, so wird der **infinitesimale Erzeuger von  $\theta$**  durch  $V_p = \theta^{(p)'(0)}$  definiert.

Analog zu Lemma 9.8 gilt das folgende Resultat.

**Lemma 9.13.** *Ist  $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$  ein glatter Fluss, so ist der infinitesimale Erzeuger  $V$  von  $\theta$  ein glattes Vektorfeld, und jede Kurve  $\theta^{(p)}$  ist eine Integralkurve von  $V$ .*

Wir treffen die folgende Definition.

**Definition 9.14.** Eine **maximale Integralkurve** ist eine Integralkurve, die nicht zu einer Integralkurve auf einem größeren offenen Intervall fortgesetzt werden kann, und ein **maximaler Fluss** ist ein Fluss, der keine Fortsetzung zu einem Fluss auf einem größeren Flussgebiet zulässt.