9. Integralkurven und Flüsse von Vektorfeldern

9.1 Integralkurven

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ist $\gamma\colon J \to M$ eine glatte Kurve, so ist für jedes $t \in J$ der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ ein Vektor in $T_{\gamma(t)}M$. Was ist mit dem umgekehrten Prozess? Das heißt: Gegeben $V \in \mathfrak{X}(M)$, können wir eine Kurve γ finden, deren Tangentialvektor jeweils dem entsprechenden Wert des Vektorfeldes entspricht?

Definition 9.1. Sei V ein Vektorfeld auf M. Eine **Integralkurve** von V ist eine differenzierbare Kurve $\gamma\colon J \to M$, deren Geschwindigkeit in jedem Punkt gleich dem Wert von V in diesem Punkt ist:

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \quad \text{für alle } t \in J. \tag{9.1}$$

Falls $0 \in J$, heißt der Punkt $\gamma(0)$ der **Startpunkt von $\boldsymbol{\gamma}$**.

Bevor wir weiter in die Theorie einsteigen, betrachten wir einige einfache Beispiele.

Beispiel 9.2. Seien (x, y) die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$, und sei $V = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Dann ist

$$\gamma(t) = (a + t, b), \quad a, b \text{ Konstanten}$$

eine Integralkurve von V. Zu beachten ist, dass es zu jedem $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Integralkurve von V mit Startpunkt (p, q) gibt und dass die Bilder zweier Integralkurven entweder identisch oder disjunkt sind. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Integralkurven von V genau die Geraden parallel zur x-Achse sind.

Beispiel 9.3. Sei $W = x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, die in Standardkoordinaten als $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ geschrieben wird, so übersetzt sich die Bedingung $\gamma'(t) = W_{\gamma(t)}$ dafür, dass γ eine Integralkurve ist, in

$$x'(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)} + y'(t)\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)} = x(t)\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)} - y(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)}.$$

Durch Vergleich der Komponenten dieser Vektoren sehen wir, dass dies äquivalent zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}$$

ist. Diese Gleichungen haben die Lösungen

$$x(t) = a\cos t - b\sin t, \qquad y(t) = a\sin t + b\cos t,$$

für beliebige Konstanten a und b. Somit ist jede Kurve der Form $\gamma(t) = (a\cos t - b\sin t, a\sin t + b\cos t)$ eine Integralkurve von W mit Startpunkt (a, b). Für $(a, b) = (0, 0)$ ist dies die konstante Kurve $\gamma(t) \equiv (0, 0)$; andernfalls handelt es sich um einen gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis. Daher sehen wir erneut, dass es zu jedem $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Integralkurve mit Startpunkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gibt und dass die Bilder der verschiedenen Integralkurven entweder identisch oder disjunkt sind.

Aus diesem Beispiel sehen wir, dass das Finden einer Integralkurve von V für gegebenes $V \in \mathfrak{X}(M)$ darauf hinausläuft, in einer glatten Karte ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen. Genauer: Sei V ein glattes Vektorfeld auf M und $\gamma\colon J \to M$ eine glatte Kurve. Auf einem glatten Koordinatengebiet $U \subseteq M$ können wir γ in lokalen Koordinaten als $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ schreiben. Dann kann (9.1) dafür, dass γ eine Integralkurve von V ist, geschrieben werden als

$$\dot\gamma^i(t)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} = V^i(\gamma(t))\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)},$$

was sich auf das folgende autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert:

$$\begin{aligned} \dot\gamma^1(t) &= V^1(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)), \\ &\;\vdots \\ \dot\gamma^n(t) &= V^n(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Das bedeutet, dass wir zur Sicherstellung der Existenz von Integralkurven eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen müssen. Daher erinnern wir zunächst an das folgende fundamentale Resultat über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Satz 9.4 (Fundamentalsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $V : U \to \mathbb{R}^n$ eine glatte vektorwertige Funktion. Betrachte das System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^i(t) &= V^i(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)),\ i = 1, \ldots, n,\\ \gamma^i(t_0) &= c^i,\ i = 1, \ldots, n,\end{aligned}$$

mit $c = (c^1, \ldots, c^n) \in U$. Dann gilt:

1. *(Existenz) Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ existieren ein offenes Intervall $J_0 \ni t_0$ und eine offene Teilmenge $U_0 \subset U$ mit $x_0 \in U_0$, sodass für alle $c \in U_0$ eine C^1-Kurve $\gamma : J_0 \to U$ existiert, die die Differentialgleichung löst.*
2. *(Eindeutigkeit) Je zwei Lösungen γ_1 und γ_2 der obigen Differentialgleichung stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.*
3. *Die Abbildung $\theta : J_0 \times U_0 \to U$, gegeben durch $\theta(t, x) = \gamma(t)$, wobei γ die eindeutige obige Lösung mit $\gamma(t_0) = x$ ist, ist glatt.*

Aus diesem Satz erhalten wir das folgende einfache Resultat.

Vorschlag 9.5. *Sei V ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Für jeden Punkt $p \in M$ existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine glatte Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, die eine Integralkurve von V mit Startpunkt p ist.* $\square$

Wir bemerken einige elementare Eigenschaften von Integralkurven.

- Ist $a \in \mathbb{R}$ und ist $\gamma\colon J \to M$ eine Integralkurve von $V \in \mathfrak{X}(M)$, so ist die Kurve $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{J} \to M$, definiert durch $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$, eine Integralkurve des Vektorfeldes aV, wobei $\widetilde{J} = \{t : at \in J\}$.

  Beweis. Wir können die Wirkung von $\widetilde{\gamma}'(t)$ auf eine glatte reellwertige Funktion f untersuchen, die in einer Umgebung eines Punktes $\widetilde{\gamma}(t_0)$ definiert ist. Mit der Kettenregel und der Tatsache, dass γ eine Integralkurve von V ist, gilt

  $$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}'(t_0)f &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} (f \circ \widetilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at)\\ &= a(f \circ \gamma)'(at_0) = a\gamma'(at_0)f = aV_{\widetilde{\gamma}(t_0)}f. \qquad \square\end{aligned}$$

- Seien V, M, J und γ wie zuvor. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $\widehat{\gamma}\colon \widehat{J} \to M$, definiert durch $\widehat{\gamma}(t) = \gamma(t + b)$, ebenfalls eine Integralkurve von V, wobei $\widehat{J} = \{t : t + b \in J\}$.

- Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann sind $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ genau dann F-verwandt, wenn F Integralkurven von X auf Integralkurven von Y abbildet, d. h. wenn für jede Integralkurve γ von X die Kurve $F \circ \gamma$ eine Integralkurve von Y ist.

  Beweis. Angenommen zunächst, X und Y seien F-verwandt, und sei $\gamma\colon J \to M$ eine Integralkurve von X. Definieren wir $\sigma\colon J \to N$ durch $\sigma = F \circ \gamma$, so gilt

  $$\sigma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = Y_{F(\gamma(t))} = Y_{\sigma(t)},$$

  also ist σ eine Integralkurve von Y.

  Umgekehrt nehme an, dass F Integralkurven von X auf Integralkurven von Y abbildet. Sei $p \in M$ gegeben, und sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Integralkurve von X mit Startpunkt p. Da $F \circ \gamma$ eine Integralkurve von Y mit Startpunkt $F(p)$ ist, gilt

  $$Y_{F(p)} = (F \circ \gamma)'(0) = dF_p(\gamma'(0)) = dF_p(X_p),$$

  was zeigt, dass X und Y F-verwandt sind. $\square$