Es ist wichtig zu beachten, dass es für eine gegebene glatte Abbildung $F : M \to N$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ möglicherweise *kein* Vektorfeld auf $N$ gibt, das $F$-verwandt mit $X$ ist. Es gibt jedoch einen Spezialfall, in dem stets ein solches Vektorfeld existiert, wie das nächste Lemma zeigt.

**Lemma 8.12.** *Seien $M$ und $N$ glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert genau ein glattes Vektorfeld auf $N$, das $F$-verwandt mit $X$ ist.*

*Proof.* Dass $Y \in \mathfrak{X}(N)$ $F$-verwandt mit $X$ ist, bedeutet, dass $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ für jedes $p \in M$ gilt. Ist $F$ ein Diffeomorphismus, so *definieren* wir $Y$ durch

$$Y_q = dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right).$$

Es ist klar, dass das so definierte $Y$ das eindeutige Vektorfeld ist, das $F$-verwandt mit $X$ ist. Beachte, dass $Y : N \to TN$ die Komposition folgender glatter Abbildungen ist:

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{dF} TN.$$

Daraus folgt, dass $Y$ glatt ist. □

Damit können wir folgende Definition treffen.

**Definition 8.13** (Pushforwards und Pullbacks)**.** Sei $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen den glatten Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$. Wir bezeichnen das eindeutige Vektorfeld, das $F$-verwandt mit $X$ ist, mit $F_*X$ und nennen es den **Pushforward von $X$ unter $F$**. Es wird explizit beschrieben durch

$$(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right). \tag{8.6}$$

Der **Pullback eines Vektorfeldes** $Y \in \mathfrak{X}(N)$ wird mit $F^*Y$ bezeichnet und ist definiert als

$$F^*Y = dF^{-1} \circ Y \circ F \in \mathfrak{X}(M). \tag{8.7}$$

Solange die Umkehrabbildung $F^{-1}$ explizit berechnet werden kann, lässt sich der Pushforward eines Vektorfeldes direkt aus der Formel in (8.6) berechnen.

Berechnen wir den Pushforward eines Vektorfeldes explizit.

Seien $M$ und $N$ die folgenden offenen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$:

$$M = \{(x, y) : y > 0 \text{ und } x + y > 0\},$$
$$N = \{(u, v) : u > 0 \text{ und } v > 0\},$$

und sei $F : M \to N$ definiert durch $F(x, y) = (x + y, x/y + 1)$. Dann ist $F$ ein Diffeomorphismus, da seine Umkehrabbildung leicht zu berechnen ist: man löse $(u, v) = (x + y, x/y + 1)$ nach $x$ und $y$ auf und erhalte die Formel $(x, y) = F^{-1}(u, v) = (u - u/v, u/v)$. Berechnen wir den Pushforward $F_*X$, wobei $X$ das folgende glatte Vektorfeld auf $M$ ist:

$$X_{(x,y)} = y^2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)}.$$

Das Differential von $F$ in einem Punkt $(x, y) \in M$ wird durch seine Jacobi-Matrix dargestellt,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix},$$

und somit wird $dF_{F^{-1}(u,v)}$ durch die Matrix

$$DF\left(u - \frac{u}{v}, \frac{u}{v}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{v}{u} & \frac{v-v^2}{u} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Für jedes $(u, v) \in N$ gilt

$$X_{F^{-1}(u,v)} = \frac{u^2}{v^2} \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{F^{-1}(u,v)}.$$

Anwendung von (8.6) mit $p = (u, v)$ liefert daher die Formel für $F_*X$:

$$(F_*X)_{(u,v)} = \frac{u^2}{v^2} \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \frac{u}{v} \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{(u,v)}.$$

## 8.5 Vektorfelder und Untermannigfaltigkeiten

Ist $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, so lässt sich ein Vektorfeld $X$ auf $M$ nicht notwendigerweise zu einem Vektorfeld auf $S$ einschränken, da $X_p$ in einem Punkt $p \in S$ möglicherweise nicht im Unterraum $T_pS \subseteq T_pM$ liegt. Für einen Punkt $p \in S$ heißt ein Vektorfeld $X$ auf $M$ **tangential an** $S$ **in** $p$, falls $X_p \in T_pS \subseteq T_pM$. Es heißt **tangential an** $S$, falls es in jedem Punkt von $S$ tangential an $S$ ist.

Sei $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und $Y$ ein glattes Vektorfeld auf $M$. Existiert ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S)$, das $\iota$-verwandt mit $Y$ ist, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet, so ist $Y$ offensichtlich tangential an $S$, da $Y_p = d\iota_p(X_p)$ für jedes $p \in S$ im Bild von $d\iota_p$ liegt. Die nächste Proposition zeigt, dass auch die Umkehrung gilt.

**Vorschlag 8.14** (Einschränkung von Vektorfeldern auf Untermannigfaltigkeiten)**.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und bezeichne $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangential an $S$, so existiert ein eindeutiges glattes Vektorfeld auf $S$, mit $Y|_S$ bezeichnet, das $\iota$-verwandt mit $Y$ ist.*

*Proof.* Dass $Y$ tangential an $S$ ist, bedeutet per Definition, dass $Y_p$ für jedes $p$ im Bild von $d\iota_p$ liegt. Somit gibt es für jedes $p$ einen Vektor $X_p \in T_pS$ mit $Y_p = d\iota_p(X_p)$. Da $d\iota_p$ injektiv ist, ist $X_p$ eindeutig, und dies definiert $X$ als Vektorfeld auf $S$. Können wir zeigen, dass $X$ glatt ist, so ist es das eindeutige Vektorfeld, das $\iota$-verwandt mit $Y$ ist. Es genügt zu zeigen, dass es in einer Umgebung jedes Punktes glatt ist.

Sei $p$ ein beliebiger Punkt in $S$. Da $S$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, sei $(U, (x^i))$ eine Slice-Karte in $M$, zentriert in $p$, so dass $S \cap U$ die Teilmenge ist, auf der $x^{k+1} = \cdots = x^n = 0$ gilt, und $(x^1, \ldots, x^k)$ lokale Koordinaten für $S$ in $U$ bilden. Ist $Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + Y^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ in diesen Koordinaten, so folgt aus unserer Konstruktion, dass $X$ die Koordinatendarstellung $Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ besitzt, welche offensichtlich glatt auf $U$ ist. $\square$

## 8.6 Lie-Klammern

In diesem Abschnitt führen wir eine wichtige Methode ein, zwei glatte Vektorfelder zu einem weiteren Vektorfeld zu kombinieren.

Seien $X$ und $Y$ glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$. Für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ können wir $X$ auf $f$ anwenden und erhalten eine weitere glatte Funktion $Xf$. Wir können nun $Y$ auf diese Funktion anwenden und erhalten eine weitere glatte Funktion $YXf = Y(Xf)$. Die Operation $f \mapsto YXf$ erfüllt jedoch im Allgemeinen nicht die Produktregel und kann daher kein Vektorfeld sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 8.15.** Definiere die Vektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x}$ und $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$ auf $\mathbb{R}^2$ und sei $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$. Eine direkte Rechnung zeigt, dass $XY(fg) = 2x$, während $fXYg + gXYf = x$ ist, sodass $XY$ keine Derivation von $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist.

Wir können auch dieselben zwei Vektorfelder in umgekehrter Reihenfolge anwenden und erhalten eine (meist andere) Funktion $XYf$. Wenden wir beide Operatoren auf $f$ an und ziehen sie voneinander ab, so erhalten wir einen Operator

$$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

genannt die **Lie-Klammer von** $X$ **und** $Y$, definiert durch

$$[X, Y]f = XYf - YXf.$$

Die entscheidende Tatsache ist, dass dieser Operator tatsächlich *ein* Vektorfeld ist.

**Lemma 8.16.** *Die Lie-Klammer eines beliebigen Paares glatter Vektorfelder ist ein glattes Vektorfeld.*

*Proof.* Es genügt zu zeigen, dass $[X, Y]$ eine Derivation von $C^\infty(M)$ ist. Für beliebige $f, g \in C^\infty(M)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\
&= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf \\
&\quad - YfXg - fYXg - YgXf - gYXf \\
&= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\
&= f[X, Y]g + g[X, Y]f.
\end{aligned}$$

□

Der Wert des Vektorfeldes $[X, Y]$ in einem Punkt $p \in M$ ist die Derivation in $p$, die durch die Formel

$$[X, Y]_p f = X_p(Y f) - Y_p(X f) \tag{8.8}$$

gegeben ist. Diese Formel ist jedoch für Berechnungen nur von begrenztem Nutzen, da sie die Berechnung von Termen erfordert, die zweite Ableitungen von $f$ enthalten, die sich stets gegenseitig aufheben. Die nächste Proposition liefert eine äußerst nützliche Koordinatenformel für die Lie-Klammer, in der die Aufhebungen bereits berücksichtigt wurden.

**Vorschlag 8.17** (Koordinatenformel für die Lie-Klammer). *Seien $X, Y$ glatte Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$ und seien $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ die Koordinatendarstellungen von $X$ und $Y$ bezüglich gewisser glatter lokaler Koordinaten $(x^i)$ für $M$. Dann besitzt $[X, Y]$ die folgende Koordinatendarstellung:*

$$[X, Y] = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{8.9}$$

*oder kürzer,*

$$[X, Y] = (XY^j - YX^j) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{8.10}$$

*Proof.* Da wir bereits wissen, dass $[X, Y]$ ein glattes Vektorfeld ist, ist seine Wirkung auf eine Funktion lokal bestimmt: $([X, Y]f)|_U = [X, Y](f|_U)$. Somit genügt es, in einer einzelnen glatten Karte zu rechnen, wo wir

$$\begin{aligned}
[X, Y]f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

erhalten, wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass gemischte partielle Ableitungen einer glatten Funktion in beliebiger Reihenfolge gebildet werden können. Vertauschen der Rollen der Summationsindizes $i$ und $j$ im zweiten Term liefert (8.9). □

Eine triviale Anwendung von (8.9) besteht darin, die Lie-Klammern der Koordinatenvektorfelder $(\partial/\partial x^i)$ in einer beliebigen glatten Karte zu berechnen: Da die Komponentenfunktionen der Koordinatenvektorfelder allesamt konstant sind, folgt

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \equiv 0 \quad \text{für alle } i \text{ und } j. \tag{8.11}$$

Beachte, dass dies auch aus der Definition der Lie-Klammer in (8.8) folgt und im Wesentlichen eine Umformulierung der Tatsache ist, dass gemischte partielle Ableitungen glatter Funktionen kommutieren. Hier ist eine etwas weniger triviale Rechnung.

**Beispiel 8.18.** Definiere die glatten Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ durch

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Dann liefert uns (8.10)

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= X(1)\frac{\partial}{\partial x} + X(y)\frac{\partial}{\partial z} - Y(x)\frac{\partial}{\partial x} - Y(1)\frac{\partial}{\partial y} - Y(x(y+1))\frac{\partial}{\partial z} \\
&= 0\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial z} - 1\frac{\partial}{\partial x} - 0\frac{\partial}{\partial y} - (y+1)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

was tatsächlich ein Vektorfeld ist.

Sehen wir uns nun einige grundlegende Eigenschaften der Lie-Klammer an.

**Vorschlag 8.19** (Eigenschaften der Lie-Klammer). *Die Lie-Klammer erfüllt die folgenden Identitäten für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:*

*(a)* BILINEARITÄT: *Für $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

*(b)* ANTISYMMETRIE:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

*(c)* JACOBI-IDENTITÄT:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

*(d) Für $f, g \in C^\infty(M)$,*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X. \tag{8.12}$$

*Proof.* Bilinearität und Antisymmetrie kann man selbst nachprüfen. Der Beweis der Jacobi-Identität ist lediglich eine Rechnung:

$$\begin{aligned}
&[X, [Y, Z]]f + [Y, [Z, X]]f + [Z, [X, Y]]f \\
&\quad = X[Y, Z]f - [Y, Z]Xf + Y[Z, X]f \\
&\qquad - [Z, X]Yf + Z[X, Y]f - [X, Y]Zf \\
&\quad = XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf + YZXf - YXZf \\
&\qquad - ZXYf + XZYf + ZXYf - ZYXf - XYZf + YXZf.
\end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck heben sich alle Terme paarweise auf. Teil (d) ist erneut eine direkte Rechnung aus der Definition der Lie-Klammer. Sei $h \in C^\infty(M)$. Wir haben

$$\begin{aligned}
[fX, gY]h &= (fX)(gY)h - (gY)(fX)h \\
&= (fX)(gYh) - (gY)(fXh) \\
&= fg(XYh) + f(Xg)(Yh) - fg(YXh) - g(Yf)(Xh) \\
&= fg[X, Y]h + (fXg)Yh - (gYf)Xh.
\end{aligned}$$

□

Die Bedeutung von Teil (d) dieser Proposition ist an dieser Stelle möglicherweise noch nicht offensichtlich, wird jedoch in den zukünftigen Vorlesungen klarer werden, wenn wir über die *Lie-Ableitung eines Vektorfeldes in Richtung eines anderen Vektorfeldes* sprechen, wo gezeigt wird, dass sie gleich der Lie-Klammer ist, und somit die Lie-Ableitung mittels Teil (d) tatsächlich eine Derivation darstellt.

Das nächste Resultat setzt die Lie-Klammer $F$-verwandter Vektorfelder in Beziehung.

**Vorschlag 8.20** (Natürlichkeit der Lie-Klammer). *Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ Vektorfelder, sodass $X_i$ $F$-verwandt mit $Y_i$ für $i = 1, 2$ ist. Dann ist $[X_1, X_2]$ $F$-verwandt mit $[Y_1, Y_2]$.*

*Proof.* Mittels (8.5) und der Tatsache, dass $X_i$ und $Y_i$ $F$-verwandt sind, gilt

$$X_1X_2(f \circ F) = X_1\big((Y_2f) \circ F\big) = (Y_1Y_2f) \circ F.$$

Analog gilt

$$X_2X_1(f \circ F) = (Y_2Y_1f) \circ F.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}[X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2 (f \circ F) - X_2 X_1 (f \circ F) \\ &= (Y_1 Y_2 f) \circ F - (Y_2 Y_1 f) \circ F \\ &= \big([Y_1, Y_2] f\big) \circ F.\end{aligned}$$

□

In Spezialfällen angewendet, hat dieses Resultat folgende wichtige Korollare. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem die Abbildung ein Diffeomorphismus ist.

**Folge 8.21.** *Wir haben Folgendes.*

1. *(Pushforwards von Lie-Klammern) Sei $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus und $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt $F_*[X_1, X_2] = [F_* X_1, F_* X_2]$.*

2. *(Klammern von Vektorfeldern, die tangential an Untermannigfaltigkeiten sind) Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $S$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $M$. Sind $Y_1$ und $Y_2$ glatte Vektorfelder auf $M$, die tangential an $S$ sind, so ist auch $[Y_1, Y_2]$ tangential an $S$.*

*Proof.*

1. Dies ist lediglich der Spezialfall von Proposition 8.20, in dem $F$ ein Diffeomorphismus ist und $Y_i = F_* X_i$ gilt.

2. Wir wissen, dass glatte Vektorfelder $X_1$ und $X_2$ auf $S$ existieren, sodass $X_i$ $\iota$-verwandt mit $Y_i$ für $i = 1, 2$ ist, wobei $\iota : S \to M$ die Inklusion bezeichnet. Nach Proposition 8.20 ist $[X_1, X_2]$ $\iota$-verwandt mit $[Y_1, Y_2]$, welches daher tangential an $S$ ist.

□