8. Vektorfelder

8.1 Glatte Vektorfelder

Definition 8.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein ***Vektorfeld auf*** M ist eine stetige Abbildung $X : M \to TM$, üblicherweise geschrieben als $p \mapsto X_p$, mit der Eigenschaft, dass

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_M, \qquad \pi : TM \to M \text{ die Projektionsabbildung} \tag{8.1}$$

oder äquivalent, $X_p \in T_pM$ für jedes $p \in M$.

Man kann sich ein Vektorfeld auf M auf dieselbe Weise vorstellen wie Vektorfelder im euklidischen Raum: als einen an jedem Punkt von M angehefteten Pfeil, der tangential an M gewählt ist und stetig von Punkt zu Punkt variiert.

Da wir bereits in Satz 4.8 gesehen haben, dass, wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit ist, das Tangentialbündel TM eine glatte Struktur von M erbt, sagen wir, dass ein Vektorfeld ein ***glattes Vektorfeld*** ist, falls es als Abbildung von M nach TM glatt ist.

Wie bei Funktionen ist für ein Vektorfeld X auf M der ***Träger von*** X definiert als der Abschluss der Menge $\{p \in M : X_p \neq 0\}$. Ein Vektorfeld heißt ***kompakt getragen***, wenn sein Träger eine kompakte Menge ist.

Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit. Ist $X : M \to TM$ ein Vektorfeld und $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Koordinatenkarte für M, so können wir den Wert von X an jedem Punkt $p \in U$ in Bezug auf die Koordinatenbasisvektoren schreiben:

$$X_p = X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p . \tag{8.2}$$

Dies definiert n Funktionen $X^i : U \to \mathbb{R}$, die sogenannten ***Komponentenfunktionen von*** X in der gegebenen Karte. Wir können die Glattheit von Vektorfeldern in Begriffen der Glattheit der Komponentenfunktionen ausdrücken.

Vorschlag 8.2. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld. Ist $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Koordinatenkarte auf M, so ist die Einschränkung von X auf U genau dann glatt, wenn seine Komponentenfunktionen bezüglich dieser Karte glatt sind.*

Beweis. Seien (x^i, v^i) die natürlichen Koordinaten auf $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$, die mit der Karte $(U, (x^i))$ assoziiert sind. Nach Definition der natürlichen Koordinaten ist die Koordinatendarstellung von $X : M \to TM$ auf U

$$\widehat{X}(x) = (x^1, \ldots, x^n, X^1(x), \ldots, X^n(x)),$$

wobei X^i die i-te Komponentenfunktion von X in x^i-Koordinaten ist. Daraus folgt unmittelbar, dass die Glattheit von X in U äquivalent zur Glattheit seiner Komponentenfunktionen ist. □

Sehen wir uns einige Beispiele für glatte Vektorfelder an.

Beispiel 8.3. (Koordinaten-Vektorfelder). Ist $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Karte auf M, so bestimmt die Zuordnung

$$p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

ein Vektorfeld auf U, das ***i-te Koordinaten-Vektorfeld*** genannt und mit $\partial/\partial x^i$ bezeichnet wird. Es ist glatt, da seine Komponentenfunktionen konstant sind.

Beispiel 8.4. (Das Euler-Vektorfeld). Das Vektorfeld V auf $\mathbb{R}^n$, dessen Wert an $x \in \mathbb{R}^n$

$$V_x = x^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x + \cdots + x^n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$$

ist, ist glatt, da seine Koordinatenfunktionen linear sind. Es verschwindet im Ursprung und zeigt überall sonst radial nach außen. Es heißt das **Euler-Vektorfeld**.

Ist $U \subseteq M$ offen, so erlaubt uns die Tatsache, dass T_pU für jedes $p \in U$ in natürlicher Weise mit T_pM identifiziert wird, TU mit der offenen Teilmenge $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ zu identifizieren. Daher kann ein Vektorfeld auf U entweder als Abbildung von U nach TU oder als Abbildung von U nach TM aufgefasst werden, je nachdem, was zweckmäßiger ist. Ist X ein Vektorfeld auf M, so ist seine Einschränkung $X|_U$ ein Vektorfeld auf U, das glatt ist, wenn X glatt ist.

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so verwenden wir
Notation: die Notation $\mathfrak{X}(M)$ oder $\Gamma(TM)$ zur Bezeichnung der Menge aller glatten Vektorfelder auf M.
Die Menge $\mathfrak{X}(M)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation:

$$(aX + bY)_p = aX_p + bY_p.$$

Das Nullelement dieses Vektorraums ist das Null-Vektorfeld, dessen Wert an jedem $p \in M$ gleich $0 \in T_pM$ ist. Außerdem können glatte Vektorfelder mit glatten reellwertigen Funktionen multipliziert werden: Sind $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so definieren wir $fX : M \to TM$ durch

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Die nächste Proposition zeigt, dass diese Operationen tatsächlich glatte Vektorfelder liefern.

Vorschlag 8.5. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.*

(1) Sind X und Y glatte Vektorfelder auf M und $f, g \in C^\infty(M)$, so ist $fX + gY$ ein glattes Vektorfeld.

(2) $\mathfrak{X}(M)$ ist ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$.

Proof. Übung. □

8.2 Lokale und globale Rahmen

Koordinaten-Vektorfelder in einer glatten Karte bieten eine bequeme Möglichkeit, Vektorfelder darzustellen, da ihre Werte an jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums bilden. Sie sind jedoch nicht die einzige Wahl.

Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit. Ein geordnetes k-Tupel $(X_1, \dots, X_k)$ von Vektorfeldern, das auf einer Teilmenge $A \subseteq M$ definiert ist, heißt **linear unabhängig**, wenn $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ für jedes $p \in A$ ein linear unabhängiges k-Tupel in T_pM ist, und heißt ***Erzeugendensystem des Tangentialbündels***, wenn das k-Tupel $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ an jedem $p \in A$ den Raum T_pM aufspannt.

Definition 8.6. Ein **lokaler Rahmen für** M ist ein geordnetes n-Tupel von Vektorfeldern $(E_1, \dots, E_n)$, das auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert ist, linear unabhängig ist und das Tangentialbündel aufspannt. Mit anderen Worten, die Vektoren $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ bilden für jedes $p \in U$ eine Basis von T_pM.

Er heißt **globaler Rahmen**, falls $U = M$, und **glatter Rahmen**, falls jedes der Vektorfelder E_i glatt ist.

Beispiel 8.7. (Lokale und globale Rahmen).

(a) Die Standard-Koordinaten-Vektorfelder bilden einen glatten globalen Rahmen für $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist $(U, (x^i))$ irgendeine glatte Koordinatenkarte für eine glatte Mannigfaltigkeit M, so bilden die Koordinaten-Vektorfelder einen glatten lokalen Rahmen $(\partial/\partial x^i)$ auf U, der ein **Koordinatenrahmen** genannt wird. Jeder Punkt von M liegt im Definitionsbereich eines solchen lokalen Rahmens.

(c) Das Vektorfeld $d/d\theta$ auf S^1, wobei θ die Winkelkoordinate ist, ist ein glatter globaler Rahmen für den Kreis.

(d) Das n-Tupel von Vektorfeldern $(\partial/\partial\theta^1, \dots, \partial/\partial\theta^n)$ auf dem n-Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ist ein glatter globaler Rahmen für $\mathbb{T}^n$.

Für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gibt es eine spezielle Art von Rahmen, die für geometrische Probleme oft nützlicher ist als beliebige Rahmen. Ein k-Tupel von Vektorfeldern $(E_1, \dots, E_k)$, das auf einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert ist, heißt **orthonormal**, wenn für jedes $p \in A$ die Vektoren $(E_1|_p, \dots, E_k|_p)$ orthonormal bezüglich des euklidischen Skalarprodukts sind (wobei wir $T_p\mathbb{R}^n$ in der üblichen Weise mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren). Ein (lokaler oder globaler) Rahmen, der aus orthonormalen Vektorfeldern besteht, heißt **orthonormaler Rahmen**.

8.3 Vektorfelder und Derivationen

Erinnern wir uns, dass wir einen Tangentialvektor als Derivation auffassen können. Analog definieren Vektorfelder Operatoren auf dem Raum der glatten reellwertigen Funktionen $C^\infty(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M. Sind $X \in \mathfrak{X}(M)$ und f eine glatte reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert ist, so erhalten wir eine neue Funktion $Xf : U \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(Xf)(p) = X_p f,$$

wobei der Tangentialvektor X_p als Derivation auf die Funktion f wirkt. Da die Wirkung eines Tangentialvektors auf eine Funktion durch die Werte der Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung bestimmt ist, folgt, dass Xf lokal bestimmt ist. Insbesondere gilt für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$:

$$(Xf)|_V = X(f|_V). \tag{8.3}$$

Diese Konstruktion liefert ein weiteres nützliches Glattheitskriterium für Vektorfelder.

Vorschlag 8.8. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) X ist glatt.

(b) Für jedes $f \in C^\infty(M)$ ist die Funktion Xf glatt auf M.

(c) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jedes $f \in C^\infty(U)$ ist die Funktion Xf glatt auf U.

Proof. Wir werden zeigen, dass (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Um (a) $\Rightarrow$ (b) zu beweisen, nehmen wir an, X sei glatt, und sei $f \in C^\infty(M)$. Für jedes $p \in M$ können wir glatte Koordinaten (x^i) in einer Umgebung U von p wählen. Dann können wir für $x \in U$ schreiben:

$$Xf(x) = \left(X^i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right) f = X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Da die Komponentenfunktionen X^i glatt auf U sind, folgt, dass Xf glatt auf U ist. Da dasselbe in einer Umgebung jedes Punktes gilt, ist Xf glatt auf M.

Um (b) $\Rightarrow$ (c) zu beweisen, nehmen wir an, $U \subseteq M$ sei offen und $f \in C^\infty(U)$. Für jedes $p \in U$ sei ψ eine glatte Buckelfunktion, die in einer Umgebung von p gleich 1 ist und in U getragen ist, und definiere $\widetilde{f} = \psi f$, fortgesetzt durch Null auf $M \setminus \operatorname{supp} \psi$. Dann ist $X\widetilde{f}$ nach Voraussetzung glatt und gleich Xf in einer Umgebung von p. Dies zeigt, dass Xf in einer Umgebung jedes Punktes von U glatt ist.

Schließlich, um (c) $\Rightarrow$ (a) zu beweisen, nehmen wir an, Xf sei glatt, wann immer f auf einer offenen Teilmenge von M glatt ist. Sind (x^i) irgendwelche glatten lokalen Koordinaten auf $U \subseteq M$, so können wir jede Koordinate x^i als glatte Funktion auf U auffassen. Wenden wir X auf eine dieser Funktionen an, so erhalten wir

$$Xx^i = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = X^i.$$

Da Xx^i nach Voraussetzung glatt ist, folgt, dass die Komponentenfunktionen von X glatt sind, also ist X glatt. □

Somit definiert ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine Abbildung von

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad f \mapsto Xf.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear über $\mathbb{R}$. Darüber hinaus impliziert die Leibniz-Regel für Tangentialvektoren als Derivationen die Produktregel für Vektorfelder:

$$X(fg) = f\,Xg + g\,Xf, \tag{8.4}$$

wie man leicht durch Auswerten beider Seiten an einem beliebigen Punkt $p \in M$ überprüfen kann.

Eine Abbildung $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ heißt **Derivation** (im Unterschied zu einer *Derivation an p*), wenn sie linear über $\mathbb{R}$ ist und (8.4) für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt. Somit ist jedes Vektorfeld eine Derivation auf $C^\infty(M)$.

Die Funktion Xf wird manchmal auch mit $\mathcal{L}_X f = Xf$ bezeichnet und heißt **Lie-Ableitung von f in Richtung X.**

Die nächste Proposition zeigt, dass Derivationen von $C^\infty(M)$ mit glatten Vektorfeldern identifiziert werden können.

Lemma 8.9. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ist genau dann eine Derivation, wenn sie die Form $Df = Xf = \mathcal{L}_X f$ für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ hat.*

Proof. Wir haben oben gerade gezeigt, dass jedes glatte Vektorfeld eine Derivation induziert. Umgekehrt, sei $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ eine Derivation. Wir müssen ein Vektorfeld X angeben, so dass $Df = Xf$ für alle f. Aus der obigen Diskussion ist klar, dass, falls es ein solches Vektorfeld gibt, sein Wert an $p \in M$ die Derivation an p sein muss, deren Wirkung auf eine beliebige glatte reellwertige Funktion f gegeben ist durch

$$X_p f = Df(p)$$

Die Linearität von D garantiert, dass dieser Ausdruck linear von f abhängt, und die Tatsache, dass D eine Derivation ist, liefert die Leibniz-Regel für Tangentialvektoren. Somit ist die so definierte Abbildung $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tatsächlich ein Tangentialvektor, das heißt, eine Derivation von $C^\infty(M)$ an p. Dies definiert X als Vektorfeld. Da $Xf = Df$ glatt ist, wann immer $f \in C^\infty(M)$ ist, ist dieses Vektorfeld nach Proposition 8.8 glatt. □

Somit gilt:

glatte Vektorfelder auf $M \leftrightarrow$ Derivationen von $C^\infty(M)$.

8.4 Vektorfelder, glatte Abbildungen, Pushforwards und Pullbacks

Erinnern wir uns, dass wir, wenn $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und X ein Vektorfeld auf M ist, für jeden Punkt $p \in M$ einen Vektor $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$ erhalten, indem wir das Differential von F auf X_p anwenden. Dies wirft die Frage auf: Liefert dieser Prozess, wenn er global angewendet wird, ein Vektorfeld auf N anstelle nur von Tangentialvektoren, die vom Punkt abhängen? Die Antwort lautet **nein**, dies definiert im Allgemeinen kein *Vektorfeld* auf N. Zum Beispiel, falls F nicht surjektiv ist, gibt es keine Möglichkeit zu entscheiden, welcher Vektor einem Punkt $q \in N \setminus F(M)$ zugeordnet werden soll. Falls F nicht injektiv ist, dann kann es für einige Punkte von N mehrere verschiedene Vektoren geben, die durch Anwenden von dF auf X an verschiedenen Punkten von M erhalten werden.

Sei $F : M \to N$ glatt und X ein Vektorfeld auf M, und nehmen wir an, es gebe ein Vektorfeld Y auf N mit der Eigenschaft, dass für jedes $p \in M$ gilt $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$. In diesem Fall sagen wir, dass die Vektorfelder X und Y **F-verwandt** sind. Die nächste Proposition zeigt, wie F-verwandte Vektorfelder auf glatte Funktionen wirken.

Vorschlag 8.10. *Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Dann sind X und Y genau dann F-verwandt, wenn für jede glatte reellwertige Funktion f, die auf einer offenen Teilmenge von N definiert ist, gilt:*

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F. \tag{8.5}$$

Proof. Für jedes $p \in M$ und jede glatte reellwertige Funktion f, die in einer Umgebung von $F(p)$ definiert ist, gilt

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = dF_p(X_p)f,$$

während

$$(Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}f.$$

Somit gilt (8.5) für alle f genau dann, wenn $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ für alle p gilt, d.h., genau dann, wenn X und Y F-verwandt sind. □

Beispiel 8.11. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die glatte Abbildung $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist $\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ F-verwandt zum Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, das definiert ist durch

$$Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$