

Lesung 1

Bevor wir uns eingehend mit der Differentialgeometrie befassen, wollen wir zunächst einmal ganz ungezwungen erörtern, worum es bei der Differentialgeometrie eigentlich geht. Nehmen wir an, $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei eine "glatte Fläche", und seien $x, y \in \Sigma^2$; wir möchten nun den "Abstand" zwischen x und y messen. Natürlich möchten wir den Abstand zwischen zwei Punkten auf Σ *entlang* Σ messen. Nehmen wir vorerst an, wir hätten einen Pfad $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma([a, b]) \subset \Sigma$, $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wir können dann die "Länge von γ " definieren durch

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt \quad (0.1)$$

wobei $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt ist und $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Nachdem wir die Länge definiert haben, können wir den Abstand zwischen x und y definieren als

$$d(x, y) := \inf_{P(x, y)} l(\gamma), \quad (0.2)$$

wobei $P(x, y) = \{\gamma \mid \gamma \text{ ist ein Weg zwischen } x \text{ und } y\}$.

Daraus ergibt sich folgende Frage:

Frage 0.1. *Gibt es für eine glatte Fläche Σ^2 und $x, y \in \Sigma$ einen glatten Weg von x nach y , der die kürzestmögliche Länge hat? Wenn ja, ist ein solcher Weg dann eindeutig?*

Wir werden später im Kurs sehen, dass die Antwort auf beide Fragen „Ja“ lautet, wenn x und y nahe genug beieinander liegen. Ein solcher kürzester Weg wird als **Geodäte** bezeichnet und durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung charakterisiert. Solche Geodäten entsprechen den "Geraden" auf Σ , auch wenn auf Σ möglicherweise kein *gerader Weg* existiert. So weißt du vielleicht bereits, dass der kürzeste Weg zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Oberfläche einer Kugel, also die Geodäten, "Großkreise" sind.

Vielleicht ist dir aufgefallen, dass das zentrale Konzept, das wir benötigten, um die Länge eines Weges und damit den Abstand zwischen zwei Punkten zu definieren, das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist. Wir mussten den Wert von $\langle v, w \rangle$ für jene $v, w \in \mathbb{R}^3$ kennen, die an einem beliebigen Punkt tangential zu Σ sind. Vielleicht wissen Sie aus früheren Kursen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es uns ermöglicht, den Winkel θ zwischen zwei Vektoren v, w nach der folgenden Formel zu berechnen:

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \theta.$$

Somit können wir nicht nur die Länge eines beliebigen glatten Pfades entlang Σ definieren, sondern auch den Winkel zwischen zwei glatten Pfaden, sofern sie sich schneiden. Die Möglichkeit, das Skalarprodukt zweier „Tangentialvektoren“ zu bilden, macht Σ zu einer **2-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit**, und das Skalarprodukt wird als **Riemannsche Metrik** bezeichnet. Wie bei jedem neuen mathematischen Objekt bzw. jeder neuen mathematischen Struktur stellt sich die naheliegende Frage: Angenommen, $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ seien zwei glatte Flächen und $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ eine glatte bijektive Abbildung, sodass auch $f^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ glatt ist. Eine solche Funktion f wird als **Diffeomorphismus** bezeichnet, und Σ_1 und Σ_2 werden als zueinander **diffeomorph (diffeomorph)** bezeichnet. Wenn f zudem alle Abstände und Winkel beibehält, wird sie als **Isometrie** bezeichnet, und Σ_1 und Σ_2 sind dann zueinander **isometrisch**.

Frage 0.2. *Wenn Σ_1 und Σ_2 zwei diffeomorphe Flächen sind, gibt es dann eine Möglichkeit zu erkennen, ob sie auch isometrisch sind?*

Betrachten wir zum Beispiel die beiden unterschiedlichen Kugeln in \mathbb{R}^3 . In Abbildung 1 sehen wir die Standard-Einbettung einer Kugel in \mathbb{R}^3 , und in Abbildung 2 eine leicht vom Standard abweichende Einbettung, bei der ein Teil der Kugel so gestreckt ist, dass er wie ein Zylinder aussieht. Intuitiv scheint es, als seien die beiden Kugeln diffeomorph zueinander. Wiederum scheint es intuitiv so, als sollten sie *nicht* isometrisch sein, da die Länge der Wege auf den Teilen der Kugeln im gestreckten Abschnitt unterschiedlich sein könnte. Aber wie lassen sich diese Gedanken formal begründen?

Eine Möglichkeit, diese Gedanken formal zu begründen, besteht darin, das Konzept des Paralleltransports (Paralleltransport) von Vektoren entlang geschlossener Wege einzuführen. In den Abbildungen weist Abbildung 1 eine „runderere“ Kugel auf, und der Paralleltransport eines Vektors v entlang des eingezeichneten geschlossenen Weges ergibt bei der Rückkehr einen anderen Vektor. Im Gegensatz dazu sieht der schraffierte Teil der Kugel in Abbildung 2 flach aus, und der Paralleltransport des Vektors v ergibt am Ende denselben Vektor. Dies wird in den kommenden Vorlesungen formal begründet, und wir werden zeigen, dass diese Eigenschaft mit der **Krümmung** der Kugel an einem Punkt zusammenhängt. Dies wird es uns auch ermöglichen zu beweisen, dass die Kugeln in beiden Abbildungen tatsächlich nicht isometrisch sind!

Wir werden uns ausführlich mit der Definition und Untersuchung der Eigenschaften der Krümmung befassen und dabei beweisen, dass es sich dabei um ein mathematisches Objekt handelt, das als **Tensorfeld** bezeichnet wird. Wir werden uns außerdem mit dem Begriff der *lokal flach* beschäftigen mit Teilen von Flächen, d.h., die lokal wie Teile von \mathbb{R}^2 aussehen. Beispielsweise zeigt der Zylinder in Abbildung 3 einen Zylinder, der lokal flach ist. Tatsächlich wirft dies die Frage auf, ob die *gesamte* Kugel in Abbildung 2 so gestreckt werden kann, dass die Kugel überhaupt nicht gekrümmt ist?

Diese Frage wird beantwortet, nachdem wir das folgende erstaunliche Ergebnis bewiesen haben.

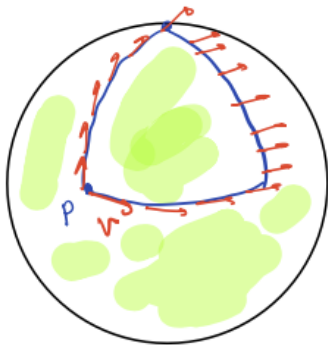


Figure 1: Standard embedding of $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ with parallel transport of a vector along a closed path leading to a different vector on return.

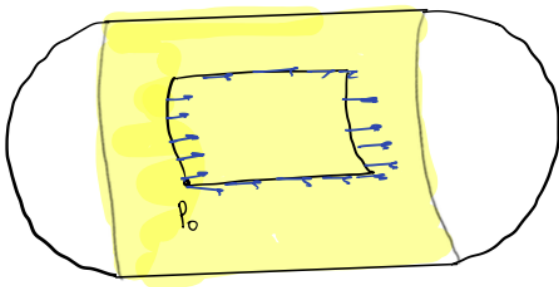


Figure 2: Another embedding of $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ but now the yellow shaded region is locally flat. Parallel transport of a vector returns to the same vector along a closed path.

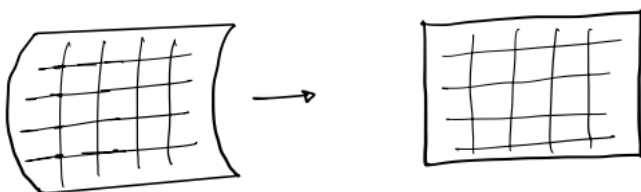


Figure 3:

Satz 0.3 (Gauss-Bonnet Satz). Wenn M eine kompakte, zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M ist und wenn K die Gauß-Krümmung von M und k die geodätische Krümmung von ∂M ist, dann gilt

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k ds = 2\pi\chi(M), \tag{0.3}$$

wobei $\chi(M)$ die Eulersche Charakteristik von M ist.

Wir werden den Satz von Gauss-Bonnet verwenden, um zu beweisen, dass es keine Riemannsche Metrik auf S^2 geben kann, die überall lokal flach ist.

Wir beginnen nun mit der formalen Betrachtung der Themen.

1. Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Zunächst wiederholen wir einige grundlegende Begriffe aus der Topologie.

Definition 1.1. Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ wird als **Topologie** auf M bezeichnet, wenn

1. $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.
2. Beliebige Vereinigungen von Elementen von \mathcal{O} gehören zu \mathcal{O} , dh., wenn $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{O}$ gilt, dann gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} U_i$.
3. Endliche Schnittmengen von Elementen in \mathcal{O} gehören zu \mathcal{O} , d. h., wenn $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, dann gehört auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$. Wir bezeichnen das Paar (M, \mathcal{O}) als einen **topologischen Raum**.

Elemente von \mathcal{O} werden als **offene Mengen (offene Mengen)** bezeichnet. Eine Teilmenge $C \subset M$ wird als **geschlossen** (abgeschlossen) bezeichnet, wenn $M \setminus C \in \mathcal{O}$ gilt. Seien (M, \mathcal{O}_M) und (N, \mathcal{O}_N) zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ wird als **stetig** bezeichnet, wenn

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M \quad \forall V \in \mathcal{O}_N.$$

Das bedeutet, dass die Urbilder von offenen Mengen in N in M offen sind. Eine bijektive stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$, bei der auch f^{-1} stetig ist, wird als **Homöomorphismus** bezeichnet; in diesem Fall sagt man, dass M und N **homöomorph** sind.

Wir können nun definieren, was eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Definition 1.2. Sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann wird M als **n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** bezeichnet, wenn

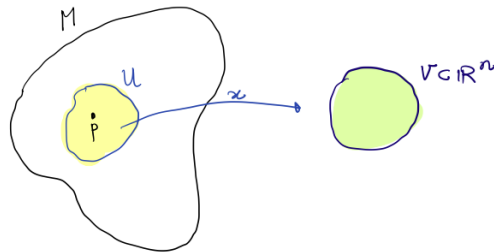
1. M ist **Hausdorff (hausdorffsch)**, d. h., jedes Paar unterschiedlicher Punkte lässt sich durch offene Mengen trennen: Für $p, q \in M$ gibt es offene Mengen $U \ni p$ und $V \ni q$ so, dass $U \cap V = \emptyset$.
2. Die Topologie von M hat eine **abzählbare Basis**, was bedeutet, dass es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ gibt, sodass für jedes $U \in \mathcal{O}$ ein $B_i \in \mathcal{B}$ existiert, wobei $i \in I$ und

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

3. (am wichtigsten) M ist **lokal homöomorph** („lokal homöomorph“) zu \mathbb{R}^n (dasselbe n wie in der Definition), das heißt, für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Menge $U \ni x$ und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine Homöomorphie $x : U \rightarrow V$ zwischen ihnen.

Das bedeutet im Grunde, dass jede Mannigfaltigkeit lokal wie ein euklidischer Raum aussieht.

Definition 1.3. Die Homöomorphismen $x : U \rightarrow V$ in Definition 1.2 werden als **Karten** oder **lokale Koordinatensysteme** von M bezeichnet.



Beispiel 1.4. Jeder euklidische Raum \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $U = M$, $V = \mathbb{R}^n$ und $x = id$, der Identitätsabbildung.

Beispiel 1.5. Jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $U = O$, $V = \mathbb{R}^n$ und $x = id$.

Beispiel 1.6. Die n -dimensionale Kugel

$$S^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$$

ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Existenz von Koordinatensystemen lässt sich mithilfe der stereografischen Projektion beweisen. Wenn $s = \{-1, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ den Südpol der Kugel bezeichnet, dann definieren wir $U_1 = S^n \setminus \{s\}$ und setzen $V_1 = \mathbb{R}^n$. Definiere die Abbildung x durch

$$x(y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^n}_{\hat{y}}) = \frac{2}{1 + y^0} \cdot \hat{y}.$$

Offensichtlich ist die Abbildung x stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion x^{-1} ist gegeben durch

$$x^{-1}(z) = \frac{1}{4 + \|z\|^2} (4 - \|z\|^2, 4z)$$

und ist somit ebenfalls stetig. Somit ist x eine Koordinatenfunktion von M .

Ähnlich verhält es sich, wenn wir den Nordpol $n = \{1, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ entfernen und $U_2 = S^n \setminus \{n\}$ setzen sowie erneut $V_2 = \mathbb{R}^{n+1}$ wählen; dann ist $x' : U_2 \rightarrow V_2$ gegeben durch

$$x'(y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^n}_{\hat{y}}) = \frac{2}{1 - y^0} \cdot \hat{y},$$

ist eine weitere Kartierung, was beweist, dass S^n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 1.7. Betrachten Sie den Doppelkegel $M = \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 = (y^2)^2 + (y^3)^2\}$. Beweisen Sie, dass M keine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist, indem Sie zeigen, dass keine Koordinatensystemkoordinaten existieren.

Beispiel 1.8. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion. Die **Grafik** von f ist die Menge

$$\Gamma(f) = \{(y, f(y)) \mid y \in U\}.$$

Sei $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf den ersten Faktor und sei $x : \Gamma(f) \rightarrow U$ die Abbildung $x = \pi_{1|\Gamma(f)}$, die eine stetige Bijektion mit einer stetigen Umkehrfunktion ist. Somit ist $\Gamma(f)$ eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und tatsächlich homöomorph zu U selbst. Die Koordinaten $(\Gamma(f), x)$ werden als Graphkoordinaten bezeichnet.

Wenn man annimmt, dass \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m genau dann homöomorph sein können, wenn $n = m$ ist, dann gilt Folgendes:

Lemma 1.9. (*Topologische Invarianz der Dimension*). Die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit ist eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit.

Wir werden weitere Beispiele für Mannigfaltigkeiten betrachten. Angenommen, wir haben eine Kartierung oder ein lokales Koordinatensystem $x : U \rightarrow V$. Dann können wir an jedem Punkt $p \in U$ die Koordinaten $(x^1(p), \dots, x^n(p)) \in V \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, die wir als **Koordinaten von p** bezeichnen.

Bevor wir weitere Beispiele und Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten besprechen, wollen wir sehen, ob wir in niedrigeren Dimensionen mehr Informationen über sie gewinnen können.

0-dimension. Ist eine Mannigfaltigkeit M 0-dimensional, so hat jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \ni p$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist. Somit ist $\{p\}$ für jedes p eine offene Teilmenge von M und folglich hat M die diskrete Topologie. Zudem zwingt die zweite Bedingung in Definition 1.2 dazu, dass M ein abzählbarer Raum ist. Somit haben wir Folgendes bewiesen

Vorschlag 1.10. Die einzigen topologischen Mannigfaltigkeiten der Dimension 0 sind abzählbare Räume mit diskreter Topologie.

In den kommenden Vorlesungen werden wir die folgende Klassifizierung für eindimensionale Mannigfaltigkeiten beweisen.

Vorschlag 1.11. Jede zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit ist entweder mit S^1 oder mit \mathbb{R} homöomorph.

Anhand des folgenden Beispiels möchten wir die Beziehung zwischen der Topologie auf M und der Menge der Koordinatensysteme auf M besser verstehen. Intuitiv scheint es, als könnten wir alles über die Topologie von M sagen, wenn uns eine Sammlung von Koordinatensystemen von M gegeben ist, die es abdecken. Dies ist der Inhalt des nächsten Lemmas.

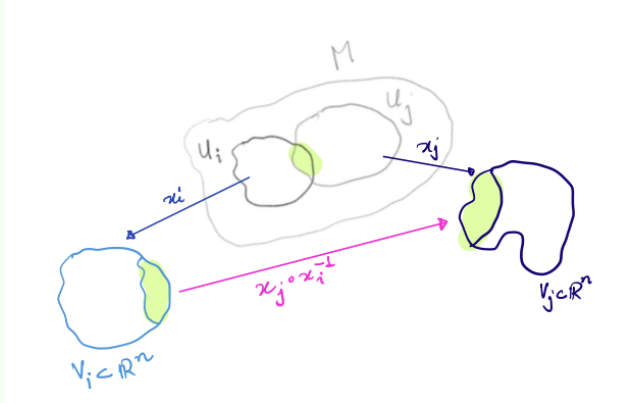
Lemma 1.12. Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine eindeutige Topologie, wobei offene Mengen die Definitionsbereiche der Koordinatensätze der Mannigfaltigkeit sind.

Wir beweisen dieses Lemma in einer Reihe von Sätzen.

Vorschlag 1.13. Sei M eine Menge und I eine Indizierungsmenge. Angenommen, für alle $i \in I$ gilt: $U_i \subset M$, $V_i \subset \mathbb{R}^n$ und $x_i : U_i \rightarrow V_i$ sind Bijektionen. Angenommen, es gilt Folgendes:

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$,
2. für alle $i \in I$ ist $x_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ offen, und
3. $x_j \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ ist eine stetige Abbildung auf \mathbb{R}^n , für alle $i, j \in I$ (siehe Abbildung 1.13).

Dann verfügt M über eine eindeutige Topologie, in der die Mengen U_i offene Mengen sind und alle Abbildungen x_i Homöomorphismen sind. Wenn es darüber hinaus eine abzählbare Menge I' gibt, für die $\bigcup_{i \in I'} U_i = M$ gilt, dann hat die Topologie auf M eine abzählbare Basis, und wenn für jedes $p, q \in M$ ein $i \in I$ existiert, sodass



$p, q \in U_i$ gilt, dann ist M auch hausdorffsch.

Beweis von Satz 1.13. Wir beweisen zunächst, dass, falls eine solche Topologie auf M existiert, diese eindeutig sein muss. Wir beweisen dies, indem wir zeigen, dass, wenn \mathcal{O} eine solche Topologie ist, eine Menge $X \in \mathcal{O} \iff x_i(X \cap U_i)$ in \mathbb{R}^n offen ist für alle $i \in I$. Angenommen, \mathcal{O} ist eine Topologie auf M , sodass U_i alle offenen Mengen sind und x_i alle Homöomorphismen sind. Sei $X \in \mathcal{O}$. Dann ist $X \cap U_i \in \mathcal{O}$ und somit ist $x_i(X \cap U_i)$ in \mathbb{R}^n offen für alle i . Umgekehrt sei $X \subset M$ so, dass $x_i(U_i \cap X) \subset \mathbb{R}^n$ für alle i offen ist. Dies bedeutet, dass $x_i \circ x_i^{-1}(U_i \cap X)$ in \mathbb{R}^n offen ist und somit X in M offen ist. Wenn also eine durch die Bedingungen des Satzes gegebene Topologie \mathcal{O} existiert, muss sie eindeutig sein.

Um die Existenz zu beweisen, zeigen wir, dass die Menge

$$\mathcal{O} = \{X \subset M \mid x_i(X \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen } \forall i \in I\}$$

eine Topologie auf M beschreibt. Offensichtlich gilt $\emptyset, M \in \mathcal{O}$, da $x_i(M \cap U_i) = x_i(U_i)$ gemäß Bedingung 2 offen in \mathbb{R}^n ist. Wenn $X_j \in \mathcal{O}$, $j \in J$ gilt, dann gilt für alle $i \in I$:

$$x_i \left(\left(\bigcup_{j \in J} X_j \right) \cap U_i \right) = x_i \left(\bigcup_{j \in J} (X_j \cap U_i) \right) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{x_i(X_j \cap U_i)}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n}$$

und daher liegen beliebige Vereinigungen von Mengen in \mathcal{O} in \mathcal{O} . **Den Teil über die endliche Schnittmenge solltest du selbst beweisen.** Somit ist das oben beschriebene \mathcal{O} tatsächlich eine Topologie auf M .

Nun wollen wir zeigen, dass in dieser Topologie U_i offene Mengen sind. Dies folgt jedoch klar aus Bedingung 2. Wir beweisen nun, dass x_i für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind. Sei $x_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung für ein $i \in I$. Wir kennen nur Teil 3. Sei $Y \subset V_i$ offen. Dann gilt für jedes $j \in I$:

$$\begin{aligned} x_j(x_i^{-1}(Y) \cap U_j) &= x_j(x_i^{-1}(Y \cap x_i(U_i \cap U_j))) \\ &= \underbrace{(x_j \circ x_i^{-1})Y}_{\text{stetig}} \cap \underbrace{x_i(U_i \cap U_j)}_{\text{offen gemäß Teil 2}}, \end{aligned}$$

offen

ist offen in \mathbb{R}^n und daher gemäß der Definition von \mathcal{O} gilt $x_i^{-1}(Y) \in \mathcal{O}$. Analog lässt sich zeigen, dass auch x_i^{-1} stetig ist, womit die Aussage bewiesen ist.

Nehmen wir nun an, die Indexmenge $I' \subset I$ sei abzählbar und bedecke M . Da die Topologie eindeutig ist, ergeben I und I' dieselbe Topologie auf M . Nun hat die Topologie jedes $V_i \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis B_i . Dann ist $x_i^{-1}(B_i)$ eine abzählbare Basis der Topologie von U_i und somit ist $\bigcup_{i \in I'} x_i^{-1}B_i$ eine abzählbare Basis von M .

Schließlich seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$ und sei $i \in I$ so, dass $p, q \in U_i$. Da \mathbb{R}^n Hausdorff ist, können wir $V_1, V_2 \subset V_i$ so wählen, dass sie offen sind, $x_i(p) \in V_1, x_i(q) \in V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt. Dann trennen $x_i^{-1}(V_1)$ und $x_i^{-1}(V_2)$ p und q . \square

Beispiel 1.14 (Reeller projektiver Raum). Wir definieren den reellen projektiven Raum wie folgt:

$$\mathbb{RP}^n = \{L \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid L \text{ ist ein eindimensionaler Unterraum}\}, \tag{1.1}$$

das heißt, \mathbb{RP}^n ist die Menge der Geraden in \mathbb{R}^{n+1} . Wir verwenden die Quotiententopologie auf \mathbb{RP}^n unter Verwendung der Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$, die jeden Punkt p in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ auf den von p aufgespannten Unterraum abbildet; mit anderen Worten, wir verwenden die Äquivalenzrelation $p \sim \lambda p, \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Wir stellen Koordinatensysteme für \mathbb{RP}^n vor. Für jedes $i = 1, \dots, n + 1$ sei

$$\bar{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ wobei } p^i \neq 0,$$

und sei

$$U_i = \pi(\bar{U}_i).$$

Aufgrund der Eigenschaften von Quotientenabbildungen ist $U_i \subset \mathbb{RP}^n$ offen, und wir definieren $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\phi_i([p^1, \dots, p^{n+1}]) = \left(\frac{p^1}{p^i}, \dots, \frac{p^{i-1}}{p^i}, \frac{p^{i+1}}{p^i}, \dots, \frac{p^{n+1}}{p^i} \right).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert. Da $\phi_i \circ \pi$ stetig ist, ist auch ϕ_i stetig; tatsächlich handelt es sich um eine Homöomorphie mit der durch

$$\phi_i^{-1}(u^1, \dots, u^n) = [u^1, \dots, u^{i-1}, 1, u^i, \dots, u^n].$$

Geometrisch bedeutet $\phi([p]) = u$, dass $(u, 1)$ der Punkt in \mathbb{R}^{n+1} ist, an dem die Gerade $[p]$ die Hyperfläche schneidet, auf der $p^i = 1$ gilt. Da nun die Mengen U_1, \dots, U_{n+1} \mathbb{RP}^n abdecken, sehen wir, dass (U_i, ϕ_i) eine Koordinatensystemdarstellung von \mathbb{RP}^n bilden und es so zu einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit machen.