Differential Geometry
JProf. Dr. Shubham Dwivedi

Universität Hamburg
Summer Semester 2026

Problem Set 8
Due date: 02.07.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

1. Suppose M is a 3-manifold and $\alpha \in \Omega^1(M)$ is nowhere zero, so for every $p \in M$, there is a well-defined 2-dimensional subspace $\xi_p := \ker \alpha_p \subset T_pM$. The set $\xi := \bigcup_{p \in M} \xi_p \subset TM$ in this situation is called a *smooth* 2*-plane field* in M. We say that ξ is *integrable* if its defining 1-form α satisfies the condition $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$.

1 **[5 points]** Show that the integrability condition depends only on ξ and not on α, i.e. for any $\beta \in \Omega^1(M)$ that is also nowhere zero and satisfies $\ker \beta_p = \xi_p$ for all $p \in M$, $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ if and only if $\beta \wedge d\beta \equiv 0$.
Hint: If $\ker \alpha_p = \ker \beta_p$*, how are the two cotangent vectors* $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$ *related?*

2 **[10 points]** Prove that the following conditions are each equivalent to integrability:
(i) $(d\alpha)_p|_{\xi_p} \in \Lambda^2 \xi_p^*$ vanishes for every $p \in M$.
Hint: Evaluate $(\alpha \wedge d\alpha)_p$ *on a basis of* T_pM *that includes two vectors in* ξ_p.
(ii) For every pair of vector fields $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ with $X(p), Y(p) \in \xi_p$ for all $p \in M$, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ also satisfies $[X, Y](p) \in \xi_p$ for all $p \in M$.

1. Angenommen, M ist eine 3-Mannigfaltigkeit und $\alpha \in \Omega^1(M)$ ist nirgends null, sodass für jedes $p \in M$ ein wohldefinierter 2-dimensionaler Unterraum $\xi_p := \ker \alpha_p \subset T_pM$ existiert. Die Menge $\xi := \bigcup_{p \in M} \xi_p \subset TM$ wird in dieser Situation als ein *glattes* 2*-Ebenenfeld* in M bezeichnet. Wir sagen, dass ξ *integrabel* ist, wenn die definierende 1-Form α die Bedingung $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ erfüllt.

1 **[5 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Integrabilitätsbedingung nur von ξ und nicht von α abhängt, d. h. für jede weitere nirgends verschwindende 1-Form $\beta \in \Omega^1(M)$, die $\ker \beta_p = \xi_p$ für alle $p \in M$ erfüllt, gilt $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ genau dann, wenn $\beta \wedge d\beta \equiv 0$.
Hinweis: Wenn $\ker \alpha_p = \ker \beta_p$ *gilt, wie hängen die beiden Kotangentialvektoren* $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$ *zusammen?*

2 **[10 Punkte]** Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen jeweils äquivalent zur Integrabilität sind:
(i) $(d\alpha)_p|_{\xi_p} \in \Lambda^2 \xi_p^*$ verschwindet für jedes $p \in M$.
Hinweis: Werten Sie $(\alpha \wedge d\alpha)_p$ *auf einer Basis von* T_pM *aus, die zwei Vektoren in* ξ_p *enthält.*
(ii) Für jedes Paar von Vektorfeldern $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(p), Y(p) \in \xi_p$ für alle $p \in M$ erfüllt auch $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ die Bedingung $[X, Y](p) \in \xi_p$ für alle $p \in M$.

———————— X ————————

2. Let $\lambda \in \Omega^1(M)$ be a fixed 1-form.

1 Show that the bilinear map $\omega \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ defined by $\omega(X, Y) := \mathcal{L}_X(\lambda(Y)) - \mathcal{L}_Y(\lambda(X)) - \lambda([X, Y])$ defines a tensor field of type $(0, 2)$.

2 [**5 points**] Find the local coordinate transformation formula for ω to show that the local coordinate formula

$$\omega_{ij} := \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i$$

also defines a tensor field on M, i.e., the formula is coordinate invariant. What is the difference between the tensor ω in Part 1 and this problem?

3 Prove that the local coordinate definition

$$\omega_{ij} := \partial_i \lambda_j$$

is *not* coordinate invariant, i.e. in general there does not exist any $\omega \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$ whose components are related to those of λ in this way for *every* choice of chart.

2. Es sei $\lambda \in \Omega^1(M)$ eine fixierte 1-Form.

1 Zeigen Sie, dass die bilineare Abbildung $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, definiert durch $\omega(X,Y) := \mathcal{L}_X(\lambda(Y)) - \mathcal{L}_Y(\lambda(X)) - \lambda([X,Y])$, ein Tensorfeld vom Typ $(0,2)$ definiert.

2 [**5 Punkte**] Bestimmen Sie die lokale Koordinatentransformationsformel für ω, um zu zeigen, dass die lokale Koordinatenformel

$$\omega_{ij} := \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i$$

ebenfalls ein Tensorfeld auf M definiert, d. h. dass die Formel koordinateninvariant ist. Was ist der Unterschied zwischen dem Tensor ω in Teil 1 und dieser Aufgabe?

3 Beweisen Sie, dass die lokale Koordinatendefinition

$$\omega_{ij} := \partial_i \lambda_j$$

nicht koordinateninvariant ist, d. h. im Allgemeinen existiert kein $\omega \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$, dessen Komponenten in dieser Weise für *jede* Wahl einer Karte mit denen von λ zusammenhängen.

———— x ————

3. Recall the concept of smooth almost complex structure $J \in \Gamma(T^{(1,1}M)$ from the lectures. We will view J as a smooth map $J\colon TM \to TM$ whose restriction to each tangent space T_pM is a linear map $J_p\colon T_pM \to T_pM$ with $J_p^2 = -1$. The *Nijenhuis tensor* is defined from J via the map

$$N\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad N(X,Y) := [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y].$$

1 Prove that this formula defines a tensor field of type $(1,2)$.

2 **[5 points]** Show that in local coordinates, the components of N and J are related by

$$N^l_{jk} = J^l_j \partial_l J^l_k - J^l_k \partial_l J^l_j + J^l_l \left(\partial_k J^l_j - \partial_j J^l_k\right).$$

3 [**5 points**] Show that N vanishes identically if $\dim M = 2$.
Hint: Notice that $N(X,Y)$ is antisymmetric in X and Y. What is $N(X,JX)$?

4 An almost complex structure J is called *integrable* if near every point $p \in M$ there exists a chart $(\mathcal{U}, x)$ in which the components J^i_j become the entries of the constant matrix

$$\mathbf{J}_0 := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},$$

where each of the four blocks is an n-by-n matrix and $\dim M = 2n$. Show that if J is integrable, then $N \equiv 0$. Such a J is also called a **complex structure on** M.

Remark: The matrix $\mathbf{J}_0$ represents the linear transformation $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\colon \mathbf{z} \mapsto i\mathbf{z}$ if one identifies $\mathbb{C}^n$ with $\mathbb{R}^{2n}$ via the correspondence $\mathbb{C}^n \ni \mathbf{x} + i\mathbf{y} \leftrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, thus an integrable almost complex structure makes M into a "complex manifold". By a deep theorem of Newlander and Nirenberg from 1957, the converse of part 4 is also true: if the Nijenhuis tensor vanishes, then J is integrable.

3. Rufen Sie sich das Konzept einer glatten fastkomplexen Struktur $J \in \Gamma(T^{(1,1)}M)$ aus den Vorlesungen ins Gedächtnis. Wir betrachten J als eine glatte Abbildung $J\colon TM \to TM$, deren Einschränkung auf jeden Tangentialraum T_pM eine lineare Abbildung $J_p\colon T_pM \to T_pM$ mit $J_p^2 = -1$ ist. Der *Nijenhuis-Tensor* wird aus J über die folgende Abbildung definiert:

$$N\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad N(X,Y) := [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y].$$

1 Beweisen Sie, dass diese Formel ein Tensorfeld vom Typ $(1,2)$ definiert.

2 **[5 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Komponenten von N und J in lokalen Koordinaten wie folgt zusammenhängen:

$$N^l_{jk} = J^l_j \partial_l J^l_k - J^l_k \partial_l J^l_j + J^l_l \left(\partial_k J^l_j - \partial_j J^l_k\right).$$

3 [**5 Punkte**] Zeigen Sie, dass N identisch verschwindet, wenn $\dim M = 2$ gilt.
Hinweis: Beachten Sie, dass $N(X,Y)$ antisymmetrisch in X und Y ist. Was ist $N(X,JX)$?

4 Eine fastkomplexe Struktur J heißt *integrabel*, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $(\mathcal{U}, x)$ gibt, in der die Komponenten J^i_j zu den Einträgen der konstanten Matrix

$$\mathbf{J}_0 := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

werden, wobei jeder der vier Blöcke eine $n \times n$-Matrix ist und $\dim M = 2n$ gilt. Zeigen Sie: Wenn J integrabel ist, dann gilt $N \equiv 0$.

Bemerkung: Die Matrix $\mathbf{J}_0$ repräsentiert die lineare Transformation $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \mathbf{z} \mapsto i\mathbf{z}$, wenn man $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ über die Korrespondenz $\mathbb{C}^n \ni \mathbf{x} + i\mathbf{y} \leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ identifiziert; somit macht eine integrable fastkomplexe Struktur M zu einer „komplexen Mannigfaltigkeit". Nach einem tiefen Satz von Newlander und Nirenberg aus dem Jahr 1957 gilt auch die Umkehrung von Teil 4: Wenn der Nijenhuis-Tensor verschwindet, dann ist J integrabel.

---X---

4. Prove that the invariant formula for $d\omega$, $\omega \in \Omega^*(M)$ proved in the lectures indeed gives the local coordinate formula

$$d\omega = \sum_{i,I} (\partial_i \omega_{i_1 \dots i_k}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

4. Beweisen Sie, dass die in den Vorlesungen bewiesene invariante Formel für $d\omega$ mit $\omega \in \Omega^*(M)$ tatsächlich die lokale Koordinatenformel

$$d\omega = \sum_{i,I} (\partial_i \omega_{i_1 \dots i_k}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

ergibt.

---ℵℵℵ---