Differential Geometry
JProf. Dr. Shubham Dwivedi

Universität Hamburg
Summer Semester 2026

Problem Set 7
Due date: 25.06.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

Recall that on a Lie group G, we have the operation of left translation which we denote by $L_g,\ g \in G$. A vector field X on G is said to be **left-invariant** if it is invariant under all left translations, i.e,

$$d(L_g)_{g'} X_{g'} = X_{gg'} \qquad \forall\ g, g' \in G. \tag{0.1}$$

This can be equivalently described as

$$(L_g)_* X = X\ \forall\ g \in G.$$

We denote the space of left-invariant vector fields on a Lie group G by $\mathfrak{X}(G)^L$.
Definition. Let G be a Lie group. The Lie algebra of G is

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} := \mathfrak{X}(G)^L.$$

Erinnern wir uns daran, dass wir auf einer Lie-Gruppe G die Operation der Linkstranslation haben, die wir mit $L_g,\ g \in G$ bezeichnen. Ein Vektorfeld X auf G heißt **linksinvariant**, wenn es unter allen Linkstranslationen invariant ist, d.h.

$$d(L_g)_{g'} X_{g'} = X_{gg'} \qquad \forall\ g, g' \in G. \tag{0.1}$$

Dies kann äquivalent beschrieben werden als

$$(L_g)_* X = X\ \forall\ g \in G.$$

Wir bezeichnen den Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe G mit $\mathfrak{X}(G)^L$.
Definition. Es sei G eine Lie-Gruppe. Die Lie-Algebra von G ist

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} := \mathfrak{X}(G)^L.$$

1. [5+5] Prove that the map $\mathrm{ev}_e \colon \mathfrak{g} \to T_eG$ defined by

$$\mathrm{ev}_e(\xi) := \xi_e$$

is an isomorphism of vector space. Thus, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$. Moreover, let $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Prove that the $[\xi, \eta] \in \mathfrak{g}$.

1. [5+5] Beweisen Sie, dass die durch

$$\mathrm{ev}_e(\xi) := \xi_e$$

definierte Abbildung $\mathrm{ev}_e \colon \mathfrak{g} \to T_eG$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Folglich gilt $\dim \mathfrak{g} = \dim G$. Es seien $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Beweisen Sie, dass $[\xi, \eta] \in \mathfrak{g}$ gilt.

X

2. Describe explicitly the Lie algebra $\mathfrak{g}$ for the following Lie groups G: $\mathbb{R}, S^1, GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R})$ and $SO(n, \mathbb{R})$.

2. Beschreiben Sie die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ für die folgenden Lie-Gruppen G explizit: $\mathbb{R}, S^1, GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R})$, und $SO(n, \mathbb{R})$.

X

3.[5] Let G be a Lie group us denote the conjugation map by C_g for $g \in G$. Define a map $\mathrm{Ad} \colon G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ by

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}_g := dC_g : T_eG \to T_eG.$$

The map Ad is called the **adjoint representation** of the Lie group G. Prove that

$$\mathrm{Ad}_g[\xi, \eta] = [\mathrm{Ad}_g \xi, \mathrm{Ad}_g \eta].$$

3.[5] Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne C_g für $g \in G$ die Konjugationsabbildung. Definiere eine Abbildung $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ durch

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}_g := dC_g : T_eG \to T_eG.$$

Die Abbildung Ad wird als die **adjungierte Darstellung** der Lie-Gruppe G bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ad}_g[\xi, \eta] = [\mathrm{Ad}_g \xi, \mathrm{Ad}_g \eta].$$

x

4. In fact, we have the following general definition. A ***Lie algebra*** (over $\mathbb{R}$) is a real vector space $\mathfrak{g}$ endowed with a map called the ***bracket*** from $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ to $\mathfrak{g}$, usually denoted by $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, that satisfies the following properties for all $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

(i) Bilinearity: For $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

(ii) Antisymmetry:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(iii) Jacobi Identity:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Prove that $\mathbb{R}^3$ with the cross product is a Lie algebra.

4. Allgemein haben wir die folgende Definition. Eine ***Lie-Algebra*** (über $\mathbb{R}$) ist ein reeller Vektorraum $\mathfrak{g}$, versehen mit einer Abbildung von $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{g}$, die als ***Klammer*** (oder ***Lie-Klammer***) bezeichnet und üblicherweise durch $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ dargestellt wird. Diese erfüllt für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ die folgenden Eigenschaften:

(i) Bilinearität: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

(ii) Antisymmetrie:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(iii) Jacobi-Identität:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt eine Lie-Algebra ist.

x

5. Prove the tensor characterization lemma from the lectures. More precisely, prove that a map A

$$A : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \mathfrak{X}(M)}_{k-\text{copies}} \to C^\infty(M)$$

is induced by a smooth covriant k-tensor field if and only if it is multilinear over $C^\infty(M)$. (**Hint:** First prove that the value of A at a point p depends only on the values of X_i in a neighbourhood of p. One way to show this is by using **bump functions** with support in the neighbourhood U of p. Having proven this, show that you can improve it to the fact that the value of A is described pointwise and not even in a neighbourhood. Define a tensor field, say $\widehat{A}$ using the definition of A and show that they must be the same.)

5. Zeigen Sie das Lemma über die Tensorcharakterisierung aus den Vorlesungen. Genauer gesagt, zeigen Sie, dass eine Abbildung A

$$A : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k-\text{Kopien}} \to C^\infty(M)$$

genau dann von einem glatten kovarianten k-Tensorfeld induziert wird, wenn sie multilinear über $C^\infty(M)$ ist. (**Hinweis:** Zeigen Sie zuerst, dass der Wert von A an einem Punkt p nur von den Werten der X_i in einer Umgebung von p abhängt. Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist die Verwendung von **Abschneidefunktionen** (Bump-Funktionen) mit Träger in der Umgebung U von p. Nachdem Sie dies bewiesen haben, zeigen Sie, dass sich dies dahingehend verschärfen lässt, dass der Wert von A punktweise und nicht einmal nur in einer Umgebung bestimmt ist. Definieren Sie ein Tensorfeld, sagen wir $\widehat{A}$, unter Verwendung der Definition von A und zeigen Sie, dass diese identisch sein müssen.)

ℵℵℵ