

Problem Set 6
Due date: 18.06.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

1. [10 points] Let $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be the function

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

and let $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the following map:

$$F(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Compute F^*df and $d(f \circ F)$ separately, and verify that they are equal.

1. [10 punkte] Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

und sei $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die folgende Abbildung:

$$F(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Berechnen Sie F^*df und $d(f \circ F)$ getrennt und überprüfen Sie, dass sie gleich sind.

X

2. Let $x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$ be the standard coordinates on \mathbb{R}^{2n} . The unit sphere S^{2n-1} in \mathbb{R}^{2n} is defined by the equation

$$\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + (y^i)^2 = 1.$$

Show that

$$X = \sum_{i=1}^n -y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

is a nowhere-vanishing smooth vector field on S^{2n-1} .

2. Seien $x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$ die Standardkoordinaten auf \mathbb{R}^{2n} . Die Einheitssphäre S^{2n-1} in \mathbb{R}^{2n} ist durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + (y^i)^2 = 1$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$X = \sum_{i=1}^n -y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

ein nirgends verschwindendes glattes Vektorfeld auf S^{2n-1} ist.

X

3. Compute the flow of each of the following vector fields on \mathbb{R}^2 :

$$(a) \quad V = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(b)[5 \text{ points}] \quad W = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(c) \quad X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(d)[5 \text{ points}] \quad Y = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Find which flows are complete and which are not.

3. Berechnen Sie den Fluss jedes der folgenden Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 :

$$(a) \quad V = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(b)[5 \text{ punkte}] \quad W = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(c) \quad X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(d)[5 \text{ punkte}] \quad Y = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}.$$

X

4. Let M be a smooth manifold and $C \subset M$ be an embedded submanifold. Let $f \in C^\infty(M)$ and suppose $p \in C$ is a point where f attains a local maxima or minima among points in C . Given a smooth local defining function $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ for C on a neighbourhood U of p in M (i.e., C is defined as the zero level set of F in U), show that there are real numbers a_1, \dots, a_k such that

$$df_p = a_1 dF_p^1 + \dots + a_k dF_p^k.$$

This is the standard **Lagrange multiplier method** which says that at an extremum of f constrained to C the differential df must lie in the span of the differentials dF_p^i .

4. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $C \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Sei $f \in C^\infty(M)$ und $p \in C$ ein Punkt, an dem f (bezüglich der Punkte in C) ein lokales Maximum oder Minimum annimmt. Gegeben sei eine glatte lokale definierende Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ für C auf einer Umgebung U von p in M (d. h., C ist in U als Nullstellenmenge von F definiert); zeigen Sie, dass reelle Zahlen a_1, \dots, a_k existieren, sodass

$$df_p = a_1 dF_p^1 + \dots + a_k dF_p^k.$$

Dies ist die klassische **Lagrange-Multiplikatoren-Methode**, die besagt, dass an einer Extremstelle von f unter der Nebenbedingung C das Differential df im Spann der Differentiale dF_p^i liegen muss.

NNN