

Problem Set 5
Due date: 11.06.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

- (1) **[10+5+5 points]** This problem deals with **Lie groups**. A Lie group is a smooth manifold G that is also a group such that the multiplication map $m : G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = gh$ and the inverse map $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ are both **smooth**. One can check that this is equivalent to the map $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ being smooth.

For any $g \in G$ the maps $L_g, R_g : G \rightarrow G$ with $L_g(h) = gh$ and $R_g(h) = hg$ are called **left translation** and **right translation** respectively. These maps are both diffeomorphisms. A smooth map $F : G \rightarrow H$ which is also a group homomorphism is called a **Lie group homomorphism**.

A **Lie subgroup of G** is a subgroup H of G endowed with a topology and smooth structure which makes it a Lie group and an immersed submanifold of G . Note that an immersed submanifold S of a manifold M is a subset $S \subset M$ endowed with a topology (not necessarily the subspace topology) with respect to which it is a topological manifold, and a smooth structure with respect to which the inclusion map $i : S \hookrightarrow M$ is a smooth immersion.

- (a) Prove that every Lie group homomorphism has constant rank. Deduce from this that a Lie group homomorphism is a Lie group isomorphism if and only if it is bijective.
- (b) Let G be a Lie group and $H \subset G$ a subgroup such that it an embedded submanifold. Prove that H is a Lie subgroup, i.e., it is also a Lie group in itself. Prove, in addition, that if H is open then it must be an embedded subgroup.
- (c) Prove that if H is an open subgroup then it must be a closed set and hence must be a union of connected components of G . (Hint: what can you say about the cosets $gH = \{gh \mid h \in H\}$ of H in G .)
- (1) **[10+5+5 Punkte]** Diese Aufgabe behandelt **Lie-Gruppen**. Eine Lie-Gruppe ist eine glatte Mannigfaltigkeit G , die zugleich eine Gruppe ist, sodass die Multiplikationsabbildung $m : G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = gh$ und die Inversenabbildung $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ beide **glatt** sind. Man kann zeigen, dass dies äquivalent dazu ist, dass die Abbildung $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ glatt ist.

Für jedes $g \in G$ heißen die Abbildungen $L_g, R_g : G \rightarrow G$ mit $L_g(h) = gh$ und $R_g(h) = hg$ **Linkstranslation** bzw. **Rechtstranslation**. Diese Abbildungen sind beide Diffeomorphismen. Eine glatte Abbildung $F : G \rightarrow H$, die zugleich ein Gruppenhomomorphismus ist, wird **Lie-Gruppenhomomorphismus** genannt.

Eine **Lie-Untergruppe von G** ist eine Untergruppe H von G , versehen mit einer Topologie und einer glatten Struktur, die sie zu einer Lie-Gruppe und einer immersierten Untermannigfaltigkeit von G macht. Beachten Sie, dass eine immersierte Untermannigfaltigkeit S einer Mannigfaltigkeit M eine Teilmenge $S \subset M$ ist, die mit einer Topologie (nicht notwendigerweise der Teilraumtopologie) versehen ist, bezüglich der sie eine topologische Mannigfaltigkeit ist, sowie mit einer glatten Struktur, bezüglich der die Inklusionsabbildung $i : S \hookrightarrow M$ eine glatte Immersion ist.

- (a) Zeigen Sie, dass jeder Lie-Gruppenhomomorphismus konstanten Rang hat. Folgern Sie daraus, dass ein Lie-Gruppenhomomorphismus genau dann ein Lie-Gruppenisomorphismus ist, wenn er bijektiv ist.
- (b) Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, die eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass H eine Lie-Untergruppe ist, d. h. dass H für sich genommen ebenfalls eine Lie-Gruppe ist. Zeigen Sie außerdem, dass H , falls H offen ist, eine eingebettete Untergruppe sein muss.
- (c) Zeigen Sie, dass H , falls H eine offene Untergruppe ist, eine abgeschlossene Menge sein muss und somit eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von G sein muss. (Hinweis: Was können Sie über die Nebenklassen $gH = \{gh \mid h \in H\}$ von H in G aussagen?)

- (2) Prove that if $F : G \rightarrow H$ is a Lie group homomorphism then the kernel of F is an embedded Lie subgroup of G of codimension equal to the rank of F . Prove that if F is injective then the image of F has a unique smooth manifold structure such that $F(G)$ is a Lie subgroup of H .
- (2) Zeigen Sie, dass für einen Lie-Gruppenhomomorphismus $F : G \rightarrow H$ der Kern von F eine eingebettete Lie-Untergruppe von G ist, deren Kodimension gleich dem Rang von F ist. Zeigen Sie, dass im Fall, dass F injektiv ist, das Bild von F eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt, sodass $F(G)$ eine Lie-Untergruppe von G ist.

- (3) Let G be a Lie group and let m be the multiplication map. Prove that

$$dm_{(e,e)} : T_e G \oplus T_e G \rightarrow T_e G \text{ is } dm_{(e,e)}(X, Y) = X + Y.$$

If $i : G \rightarrow G$ is the inversion map then prove that $di_e(X) = -X$.

- (3) Sei G eine Lie-Gruppe und sei m die Multiplikationsabbildung. Zeigen Sie, dass

$$dm_{(e,e)} : T_e G \oplus T_e G \rightarrow T_e G \text{ gegeben ist durch } dm_{(e,e)}(X, Y) = X + Y.$$

Ist $i : G \rightarrow G$ die Inversionsabbildung, so zeigen Sie, dass $di_e(X) = -X$ gilt.

- (4) This problem introduces the notion of **group actions**. Let M be a smooth manifold and G a Lie group. A **left action of G on M** is a smooth map $G \times M \rightarrow M$, $(g, p) \mapsto g \cdot p$ such that

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p \quad \forall g_1, g_2 \in G, p \in M \quad (0.1)$$

$$e \cdot p = p \quad \forall p \in M. \quad (0.2)$$

Similarly, one can define smooth right actions. Sometimes, M is called a left/right G -space. We can denote this action by a map $\theta : G \times M \rightarrow M$ and for a fixed g , denote the map by $\theta_g(p) = g \cdot p$. We have some more terminology.

For each $p \in M$, the **orbit of p** is

$$G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

The **stabilizer of p** , denoted by G_p is

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

The action is **transitive** if for all points $p, q \in M$ there exists a $g \in G$ such that $q = g \cdot p \iff$ the only orbit of M is M itself.

The action is **free** if the stabilizer of any element (which is always a subgroup) is $\{e\}$.

- (a) Consider the natural action of $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ on \mathbb{R}^n by matrix multiplication, $(A, x) \mapsto Ax$. What is this a smooth action and find the orbits of this action.
- (b) Prove that every Lie group acts on itself by conjugation.
- (4) Diese Aufgabe führt den Begriff der **Gruppenwirkungen** ein. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Eine **Linkswirkung von G auf M** ist eine glatte Abbildung $G \times M \rightarrow M$, $(g, p) \mapsto g \cdot p$, sodass

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p \quad \forall g_1, g_2 \in G, p \in M \quad (0.3)$$

$$e \cdot p = p \quad \forall p \in M. \quad (0.4)$$

Analog kann man glatte Rechtswirkungen definieren. Manchmal wird M ein linker bzw. rechter G -Raum genannt. Wir können diese Wirkung durch eine Abbildung $\theta : G \times M \rightarrow M$ bezeichnen, und für ein festes g bezeichnen wir die Abbildung mit $\theta_g(p) = g \cdot p$. Wir führen noch einige weitere Begriffe ein.

Für jedes $p \in M$ ist der **Orbit von p** definiert als

$$G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

Der **Stabilisator von p** , bezeichnet mit G_p , ist

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

Die Wirkung heißt **transitiv**, wenn es für alle Punkte $p, q \in M$ ein $g \in G$ gibt mit $q = g \cdot p \iff$ der einzige Orbit von M ist M selbst.

Die Wirkung heißt **frei**, wenn der Stabilisator jedes Elements (welcher stets eine Untergruppe ist) gleich $\{e\}$ ist.

- (a) Betrachten Sie die natürliche Wirkung von $GL(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n durch Matrixmultiplikation, $(A, x) \mapsto Ax$. Zeigen Sie, dass dies eine glatte Wirkung ist, und bestimmen Sie die Orbits dieser Wirkung.
- (b) Zeigen Sie, dass jede Lie-Gruppe durch Konjugation auf sich selbst wirkt.

x

- (5) View S^{2n+1} as the unit sphere in \mathbb{C}^{n+1} and define an action of S^1 on S^{2n+1} by

$$z \cdot (w^1, \dots, w^{n+1}) = (zw^1, \dots, zw^{n+1}).$$

Prove that this is smooth action and the orbits are disjoint unit circles in \mathbb{C}^{n+1} . This is called the **Hopf action**.

- (5) Betrachten Sie S^{2n+1} als die Einheitssphäre in \mathbb{C}^{n+1} und definieren Sie eine Wirkung von S^1 auf S^{2n+1} durch

$$z \cdot (w^1, \dots, w^{n+1}) = (zw^1, \dots, zw^{n+1}).$$

Zeigen Sie, dass dies eine glatte Wirkung ist und dass die Orbits disjunkte Einheitskreise in \mathbb{C}^{n+1} sind. Diese Wirkung wird **Hopf-Wirkung** genannt.

x

- (6) [**5+5 points**] A map $F : M \rightarrow N$ from smooth left G -spaces M and N is called **equivariant** if for all $g \in G$, $F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$. Let us also denote, for each $p \in M$, the orbit map $\theta^p(g) = g \cdot p$.

- (a) Prove that an equivariant smooth map F with respect to a transitive smooth G -action on M and N has constant rank. As a result, any bijective such map is a diffeomorphism.
- (b) Prove that the orbit map $\theta^p : G \rightarrow M$ is smooth and has constant rank and deduce that the stabilizer group of p is an embedded Lie subgroup of G .

- (6) [**5+5 Punkte**] Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen glatten linken G -Räumen M und N heißt **äquivariant**, falls für alle $g \in G$ gilt: $F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$. Wir bezeichnen außerdem für jedes $p \in M$ die Orbitabbildung mit $\theta^p(g) = g \cdot p$.

- (a) Zeigen Sie, dass eine äquivariante glatte Abbildung F bezüglich einer transitiven glatten G -Wirkung auf M und N konstanten Rang hat. Folglich ist jede solche bijektive Abbildung ein Diffeomorphismus.
- (b) Zeigen Sie, dass die Orbitabbildung $\theta^p : G \rightarrow M$ glatt ist und konstanten Rang hat, und folgern Sie, dass die Stabilisatorgruppe von p eine eingebettete Lie-Untergruppe von G ist.
