Differential Geometry
JProf. Dr. Shubham Dwivedi

Universität Hamburg
Summer Semester 2026

Problem Set 4
Due date: 21.05.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

(1) **[10 points]** Consider the map $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ defined by

$$\Phi(x, y, s, t) = (x^2 + y,\ x^2 + y^2 + s^2 + t^2 + y).$$

Show that $(0, 1)$ is a regular value of Φ, and that the level set $\Phi^{-1}(0, 1)$ is diffeomorphic to S^2.

(1) **[10 Punkte]** Betrachte die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\Phi(x, y, s, t) = (x^2 + y,\ x^2 + y^2 + s^2 + t^2 + y).$$

Zeige, dass $(0, 1)$ ein regulärer Wert von Φ ist, und dass die Niveaumenge $\Phi^{-1}(0, 1)$ diffeomorph zu S^2 ist.

x

(2) (a) Show that the image of the curve $\beta : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t)$$

from the lectures is *not* an embedded submanifold of $\mathbb{R}^2$.
[**Remark**: this is not the same as showing that β is not an embedding.]

(b) **[10 points]** Show that the image of the curve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}), \qquad \alpha \text{ irrational}$$

is *not* an embedded submanifold of the torus.
[**Remark**: Use the fact that irrationals are dense in the set of reals.]

(a) Zeige, dass das Bild der Kurve $\beta : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t),$$

aus der Vorlesung *keine* eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.
[**Hinweis**: Dies ist nicht dasselbe wie zu zeigen, dass β keine Einbettung ist.]

(b) **[10 Punkte]** Zeige, dass das Bild der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}), \qquad \alpha \text{ irrational}$$

keine eingebettete Untermannigfaltigkeit des Torus ist.
[**Hinweis**: Verwende die Tatsache, dass die irrationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen.]

x

(3) **[10 points]** If $\Phi : M \to N$ is any map and $c \in N$ then the set $\Phi^{-1}(c)$ is called a **level set of** Φ.
Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by $F(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Which level sets of F are embedded submanifolds of $\mathbb{R}^2$? For each level set, prove either that it is or that it is not an embedded submanifold.

(3) **[10 Punkte]** Ist $\Phi : M \to N$ eine beliebige Abbildung und $c \in N$, so wird die Menge $\Phi^{-1}(c)$ als **Ebenensatz von** Φ bezeichnet.
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Welche Niveaumengen von F sind eingebettete Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$? Beweise für jede Niveaumenge, ob sie eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist oder nicht.

x

(4) For each $a \in \mathbb{R}$, let M_a be the subset of $\mathbb{R}^2$ defined by

$$M_a = \{(x, y) : y^2 = x(x-1)(x-a)\}.$$

For which values of a is M_a an embedded submanifold of $\mathbb{R}^2$?

(4) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei M_a die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, definiert durch

$$M_a = \{(x, y) : y^2 = x(x-1)(x-a)\}.$$

Für welche Werte von a ist M_a eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$?

x

(5) (a) Show that the set of real orthogonal matrices $O(n, \mathbb{R})$ is a smooth submanifold of $M(n \times n, \mathbb{R})$ and also compute its dimension.

(b) Show that the set of matrcies $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ is a smooth submanifold of $M(n \times n, \mathbb{R})$ and compute its dimension. Also show that

$$T_{Id}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})) = \{H \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(H) = 0\}.$$

(a) Zeige, dass die Menge der reellen orthogonalen Matrizen $O(n, \mathbb{R})$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist, und berechne ihre Dimension.

(b) Zeige, dass die Menge der Matrizen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist, und berechne ihre Dimension. Zeige außerdem, dass

$$T_{\mathrm{Id}}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})) = \{H \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(H) = 0\}.$$

ℵℵℵ