

Problem Set 3
Due date: 07.05.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

- (1) Show that a composition of smooth submersions is a smooth submersion, and a composition of smooth immersions is a smooth immersion. Give a counterexample to show that a composition of maps of constant rank need not have constant rank.
- (1) Zeigen Sie, dass eine Verkettung glatter Submersionen eine glatte Submersion ist, und dass eine Verkettung glatter Immersionen eine glatte Immersion ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um zu zeigen, dass eine Verkettung von Abbildungen konstanten Ranges nicht notwendigerweise konstanten Rang haben muss.

—X—

- (2) If M is a smooth manifold and its tangent bundle is denoted by TM prove that the projection $\pi: TM \rightarrow M$ is a smooth submersion.
- (2) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und werde ihr Tangentialbündel mit TM bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ eine glatte Submersion ist.

—X—

- (3) (**3 points**) Denote by $\iota: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ the inclusion. Prove that for every $x \in S^n$

$$\text{im}((d\iota)_x) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0\}.$$

or in other words, $T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$.

- (3) (**3 points**) Bezeichne mit $\iota: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die Inklusion. Zeige, dass für jedes $x \in S^n$ gilt:

$$\text{im}((d\iota)_x) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Mit anderen Worten:

$$T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}.$$

—X—

- (4) (**4+4+4 points**) We consider the n -dimensional *orthogonal group* $O(n) = \{\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{id}\}$.

- (a) The set of all symmetric matrices

$$S(n) := \{\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$$

forms a linear subspace of $M(n \times n, \mathbb{R})$. Defining a map $f: M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n)$ by $f(\mathbf{A}) := \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, the orthogonal group is the level set $O(n) = f^{-1}(\text{id})$. The entries of $f(\mathbf{A})$ are quadratic functions of the entries of \mathbf{A} , thus f is clearly a smooth map. Show that its derivative at any $\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ is the linear map

$$Df(\mathbf{A}): M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n): \mathbf{H} \mapsto \mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{A}.$$

- (b) Show that $Df(\mathbf{A})$ is surjective if $\mathbf{A} \in O(n)$.

- (c) Show that $T_{\text{id}}O(n) \subset T_{\text{id}}M(n \times n, \mathbb{R})$ is the space of all *antisymmetric* matrices \mathbf{H} , i.e. those which satisfy $\mathbf{H}^T = -\mathbf{H}$.

- (4) (**4+4+4 points**) Wir betrachten die n -dimensionale *orthogonale Gruppe* $O(n) = \{\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \text{id}\}$.

- (a) Die Menge aller symmetrischen Matrizen

$$S(n) := \{ \mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \}$$

bildet einen linearen Unterraum von $M(n \times n, \mathbb{R})$. Definiert man eine Abbildung $f: M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n)$ durch $f(\mathbf{A}) := \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, so ist die orthogonale Gruppe die Niveaumenge $O(n) = f^{-1}(\text{id})$. Die Einträge von $f(\mathbf{A})$ sind quadratische Funktionen der Einträge von \mathbf{A} , daher ist f offensichtlich eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass ihre Ableitung an einer beliebigen Stelle $\mathbf{A} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die lineare Abbildung

$$Df(\mathbf{A}): M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n): \mathbf{H} \mapsto \mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{A}$$

ist.

- (b) Zeigen Sie, dass $Df(\mathbf{A})$ surjektiv ist, falls $\mathbf{A} \in O(n)$.
 (c) Zeigen Sie, dass $T_{\text{id}}O(n) \subset T_{\text{id}}M(n \times n, \mathbb{R})$ der Raum aller *antisymmetrischen* Matrizen \mathbf{H} ist, d. h. jener, die $\mathbf{H}^T = -\mathbf{H}$ erfüllen.

- (5) This problem deals with the set of matrices.

- (a) Show that the derivative of
- $\det: M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
- at
- id
- is given by the
- trace*
- :

$$D(\det)_{(\text{id})} \mathbf{H} = \text{tr}(\mathbf{H}).$$

Hint: Write $\mathbf{H} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ in terms of n column vectors as $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$, so

$$\det(\text{id} + t\mathbf{H}) = \det(\mathbf{e}_1 + t\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{e}_n + t\mathbf{v}_n),$$

where $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ denotes the standard basis of \mathbb{R}^n . Differentiate this expression with respect to t at $t = 0$, using the fact that the determinant of a matrix is linear in each of its columns.

- (b) Use the relation
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
- to generalize the formula in part (a) to

$$D(\det)(\mathbf{A})\mathbf{H} = \det(\mathbf{A}) \cdot \text{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}) \quad \text{for any } \mathbf{A} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

- (5) Diese Aufgabe befasst sich mit der Menge der Matrizen.

- (a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von
- $\det: M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
- an der Stelle
- id
- durch die
- Spur*
- gegeben ist:

$$D(\det)_{(\text{id})} \mathbf{H} = \text{tr}(\mathbf{H}).$$

Hinweis: Schreiben Sie $\mathbf{H} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mittels n Spaltenvektoren als $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$, sodass

$$\det(\text{id} + t\mathbf{H}) = \det(\mathbf{e}_1 + t\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{e}_n + t\mathbf{v}_n),$$

wobei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis von \mathbb{R}^n bezeichnet. Leiten Sie diesen Ausdruck nach t an der Stelle $t = 0$ ab und nutzen Sie dabei die Tatsache, dass die Determinante einer Matrix in jeder ihrer Spalten linear ist.

- (b) Verwenden Sie die Beziehung
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
- , um die Formel aus Teil (a) zu verallgemeinern zu

$$D(\det)(\mathbf{A})\mathbf{H} = \det(\mathbf{A}) \cdot \text{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}) \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

- (6) (4 points) Show that
- TS^1
- is diffeomorphic to
- $S^1 \times \mathbb{R}$
- .

- (6) (4 points) Zeigen Sie, dass
- TS^1
- diffeomorph zu
- $S^1 \times \mathbb{R}$
- ist.