Differential Geometry
JProf. Dr. Shubham Dwivedi

Universität Hamburg
Summer Semester 2026

Problem Set 1
Due date: 30.04.2026 at 14:00 hr

Only the problems with points will be graded./Es werden nur die Aufgaben bewertet.

Problems (German version follows the English version.)

(1) **[3 points]** Prove that the antipodal map $f : S^n \to S^n,\ f(x) = -x$ is a smooth map.

(1) **[3 Punkte]** Beweisen Sie, dass die Antipod-Abbildung $f : S^n \to S^n$, $f(x) = -x$, eine glatte Abbildung ist.

x

(2) Show that for two smooth manifolds M, N and $p \in M,\ q \in N$, there is a canonical vector space isomorphism $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$.

(2) Zeige, dass es für zwei glatte Mannigfaltigkeiten M, N und $p \in M,\ q \in N$ einen kanonischen Vektorraum-Isomorphismus $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$ gibt.

x

(3) Recall that an algebra A over $\mathbb{R}$ is a $\mathbb{R}$-vector space equipped with a product $\cdot$ which is distributive and such that $(av_1) \cdot (bv_2) = (ab)v_1 \cdot v_2$ for $a, b \in \mathbb{R},\ v_1, v_2 \in A$. Let M be a smooth manifold. Prove that $C^\infty(M)$ is an algebra over $\mathbb{R}$.

(3) Erinnern wir uns daran, dass eine Algebra A über $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, der mit einem Produkt $\cdot$ ausgestattet ist, das distributiv ist und für das gilt: $(av_1) \cdot (bv_2) = (ab)v_1 \cdot v_2$ für $a, b \in \mathbb{R},\ v_1, v_2 \in A$. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass $C^\infty(M)$ eine Algebra über $\mathbb{R}$ ist.

x

(4) **[4 points]** Prove that the map $F : \mathbb{RP}^2 \to Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ given by

$$F([x])(v) = \frac{\langle v, x\rangle x}{|x|^2},$$

is a smooth map.

(4) **[4 Punkte]** Beweisen Sie, dass die durch folgende Gleichung gegebene Abbildung $F : \mathbb{RP}^2 \to Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$:

$$F([x])(v) = \frac{\langle v, x\rangle x}{|x|^2},$$

eine glatte Abbildung ist.

x

(5) **[4 points]** Let $A \in O(3, \mathbb{R})$ be an orthogonal matrix, i.e., $AA^t = Id$. Prove that the map $f_A : S^2 \to S^2$ given by

$$f_A(x) = Ax,$$

is a smooth map.

(5) **[4 Punkte]** Sei $A \in O(3, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, d.h., $AA^t = Id$. Beweise, dass die durch

$$f_A(x) = Ax,$$

gegebene Abbildung $f_A : S^2 \to S^2$ eine glatte Abbildung ist.

ℵℵℵ