

Problem Set 1
Due date: 23.04.2026 at 14:00 hr

Only the *-marked problems will be graded./Nur die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben werden benotet.

Problems (German version follows the English version.)

- (1) Recall that if X and Y are topological spaces and Y with $\pi : X \rightarrow Y$ a surjective, continuous map then the **quotient topology** on Y determined by π is defined by declaring that $U \subset Y$ is open if and only if $\pi^{-1}(U) \subset X$ is open. The map π is called the quotient map. Prove the following.
 - (a) (Characteristic property) If Z is a topological space then a map $g : Y \rightarrow Z$ is continuous if and only if $g \circ \pi : X \rightarrow Z$ is continuous.
 - (b) The quotient topology is the unique topology on Y for which the characteristic property holds.
 - (c) A subset $K \subset Y$ is closed $\iff \pi^{-1}(K) \subset X$ is closed.
 - (d) If π is injective then it is a homeomorphism.
- (1) *Erinnern wir uns daran: Sind X und Y topologische Räume und ist $\pi : X \rightarrow Y$ eine surjektive, stetige Abbildung, dann ist die durch π bestimmte **Quotiententopologie** auf Y so definiert, dass $U \subset Y$ genau dann offen ist, wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Die Abbildung π wird als Quotientenabbildung bezeichnet. Beweisen Sie Folgendes.*
 - (a) (Charakteristische Eigenschaft) Wenn Z ein topologischer Raum ist, dann ist eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ genau dann stetig, wenn $g \circ \pi : X \rightarrow Z$ stetig ist.
 - (b) Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf Y , für die die charakteristische Eigenschaft gilt.
 - (c) Eine Teilmenge $K \subset Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\pi^{-1}(K) \subset X$ abgeschlossen ist.
 - (d) Ist π injektiv, so ist sie ein Homöomorphismus.

X

- (2) (*) Prove that the double cone given by $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 + z^2\}$ is *not* a manifold.
- (2) (*) Beweise, dass der Doppelkegel, der durch $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 + z^2\}$ gegeben ist, *keine* Mannigfaltigkeit ist.

X

- (3) The Klein bottle K can be defined using an equivalence relation \sim on \mathbb{R}^2 by defining \sim to be the smallest equivalence relation on \mathbb{R}^2 such that $(x, y) \sim (x, y+1)$ and $(x, y) \sim (x+1, -y)$ for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove that K is a 2-dimensional smooth manifold.
- (3) Die Klein-Flasche K lässt sich anhand einer Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^2 definieren, indem man \sim als die kleinste Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^2 definiert, sodass $(x, y) \sim (x, y+1)$ und $(x, y) \sim (x+1, -y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt. Beweisen Sie, dass K eine zweidimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist.

X

- (4) Let $M^n \neq \emptyset$ be a topological manifold with $n \geq 1$. Show that if M has a smooth structure, then it has uncountably many distinct ones.
- (4) Sei $M^n \neq \emptyset$ eine topologische Mannigfaltigkeit mit $n \geq 1$. Zeige, dass M , falls es eine glatte Struktur besitzt, unzählbar viele verschiedene glatte Strukturen hat.

X

- (5) (*) Recall the charts on \mathbb{R} from the lectures: (U, ϕ) with $U = \mathbb{R}$ and $\phi(x) = x$ and (V, ψ) with $V = \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^3$. Clearly, they each define atlases for \mathbb{R} , say A and A' respectively. Let us denote the real line with the smooth structure and the induced topology derived from A' by \mathbb{R}' . The real line with the smooth structure and the induced topology derived from A will be denoted by \mathbb{R} . Prove the following.

- (a) The identity map $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ is a homeomorphism.
 - (b) Let $O = (-1, 1) \subset \mathbb{R}'$. Show that the map $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \tan\left(\frac{\pi}{2}t^3\right)$ is a smooth chart on \mathbb{R}'
 - (c) Show that $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ is a smooth map but its inverse is not a smooth map.
 - (d) Find a diffeomorphism, i.e., a bijection which is smooth with a smooth inverse from $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$. Thus, the manifolds \mathbb{R} and \mathbb{R}' are diffeomorphic but are distinct as smooth manifolds.
- (5) (*) Erinnern wir uns an die Koordinatensysteme auf \mathbb{R} aus den Vorlesungen: (U, ϕ) mit $U = \mathbb{R}$ und $\phi(x) = x$ sowie (V, ψ) mit $V = \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^3$. Offensichtlich definieren sie jeweils Atlasfunktionen für \mathbb{R} , sagen wir A bzw. A' . Bezeichnen wir die reelle Gerade mit der glatten Struktur und der aus A' abgeleiteten induzierten Topologie mit \mathbb{R}' . Die reelle Gerade mit der glatten Struktur und der aus A abgeleiteten induzierten Topologie wird mit \mathbb{R} bezeichnet. Beweisen Sie Folgendes.
- (a) Die Identitätsabbildung $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ ist ein Homöomorphismus.
 - (b) Sei $O = (-1, 1) \subset \mathbb{R}'$. Zeige, dass die Abbildung $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \tan\left(\frac{\pi}{2}t^3\right)$ eine glatte Koordinatenfunktion auf \mathbb{R}' ist
 - (c) Zeige, dass $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ eine glatte Abbildung ist, ihre Umkehrfunktion jedoch keine glatte Abbildung ist.
 - (d) Finde einen Diffeomorphismus, d. h. eine glatte Bijektion mit glatter Umkehrfunktion von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$. Somit sind die Mannigfaltigkeiten \mathbb{R} und \mathbb{R}' diffeomorph, unterscheiden sich jedoch als glatte Mannigfaltigkeiten.
